

三次函數的圖形特徵

動機

三次函數有別於國中小學過的一次與二次函數，三次函數圖形的曲線也有別於一次函數的直線與二次函數的拋物線。希望從三次函數的曲線圖形觀察，了解三次函數的特性，再轉換為代數運算，以驗證圖形觀察的結論。

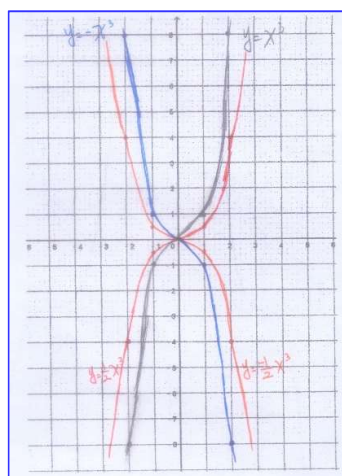
目標

1. 利用描點法畫出簡易三次函數的平滑曲線。
2. 透過 GeoGebra 教學網站的工具，畫出自訂係數的三次函數圖形，進行細部觀察與分析。
3. 分別分析三次函數 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的四個係數 a, b, c, d 對函數圖形的影響。
4. 針對三次函數的對稱中心，以及函數圖形平移特性，透過模擬圖形觀察後，以實際例題計算，來驗證觀察結果。

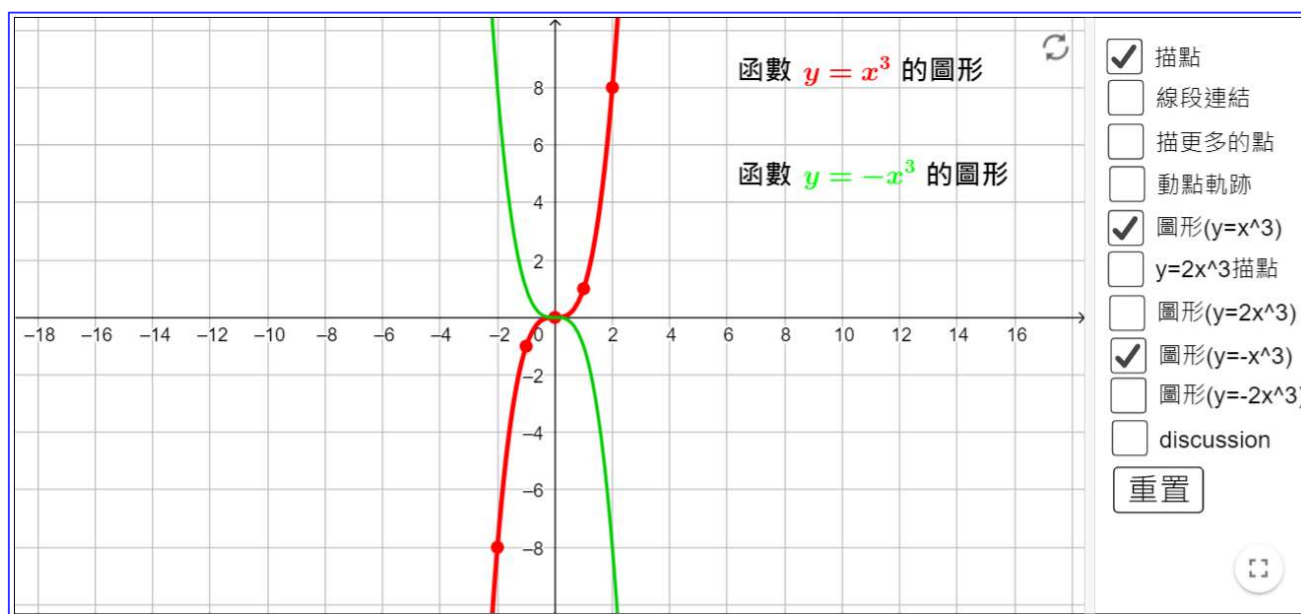
過程與成果

1. 利用描點法畫出四個簡易三次函數的平滑曲線，並觀察其特性。

x	$y = x^3$	$y = -x^3$	$y = \frac{1}{2}x^3$	$y = -\frac{1}{2}x^3$
-2	-8	8	-4	4
-1	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	0
1	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	8	-8	4	-4



- A. 三次函數的圖形均有明顯的對稱中心(此四個三次函數均對稱於原點)。
 - B. 三次項 x^3 係數的正負號，會決定圖形是從第二象限遞減至第四象限，或者是從第三象限遞增至第一象限。
 - C. 若兩個三次方程式，只有三次項 x^3 係數的正負號不同，則兩個方程式的圖形會對稱於 Y 軸。
 - D. 三次項 x^3 係數的絕對值越小，其圖形的水平範圍越寬。
2. 透過網路上的 GeoGebra 數學軟體，可設定欲觀察的三次函數係數，自動畫出三次函數圖形，來進行細部觀察與分析，並完成學習單的結論一。

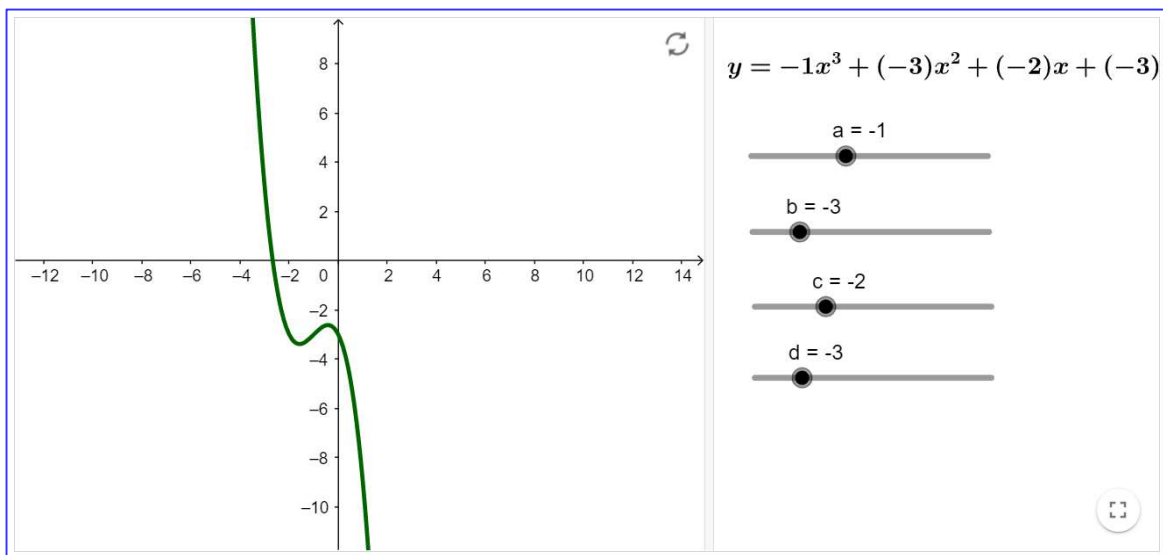


【結論一】

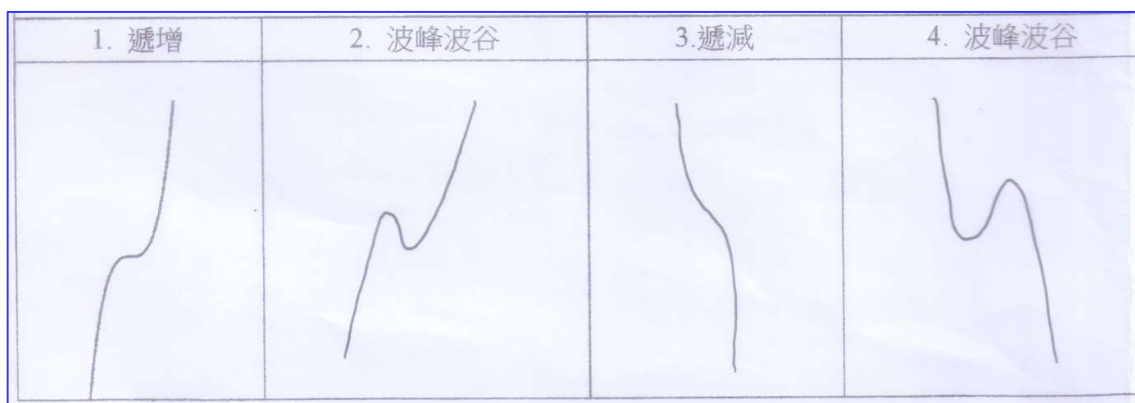
- (1) $p > 0$: $f(x) = px^3$ 為遞增函數，即 $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ，(填 $>$ ， $=$ 或 $<$) 左到右上升
- (2) $p < 0$: $f(x) = px^3$ 為遞減函數，即 $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ，(填 $>$ ， $=$ 或 $<$) 左到右降
- (3) 當 $|p|$ 越大，則函數值 $f(x) = px^3$ 的增、減速度會越 快，(填“快”或“慢”)
- (4) $y = px^3$ 與 $y = -px^3$ 的圖形對稱於 y 軸。

3. 藉由改變三次函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的係數 a, b, c, d ，觀察產生的三次

函數圖形。

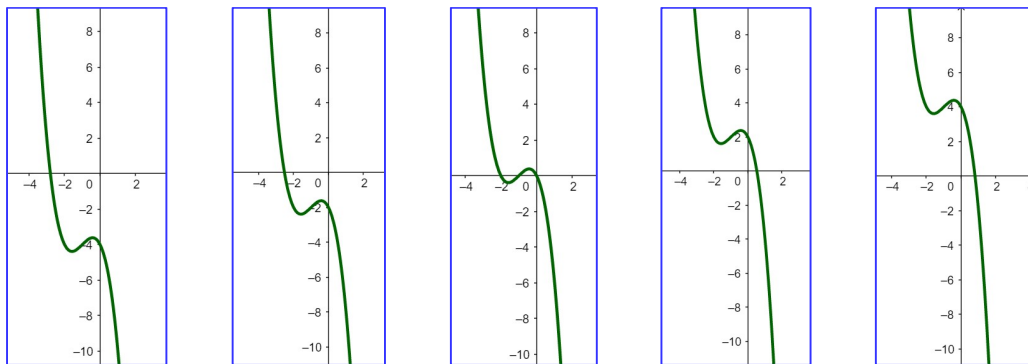


A. 不管如何改變 a, b, c, d 四個係數的值，三次函數的圖形都是如下的四種類型之一。

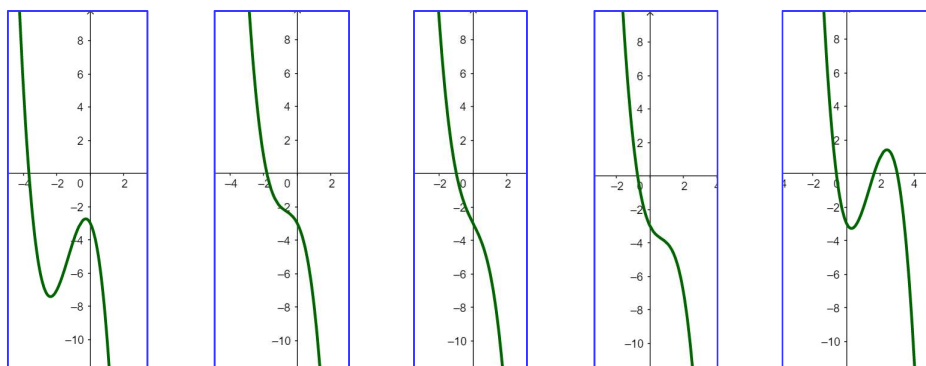


B. 若係數 $a > 0$ ，三次函數圖形為左下往右上(如上圖的 1 與 2)，
若係數 $a < 0$ ，三次函數圖形為左上往右下(如上圖的 3 與 4)。

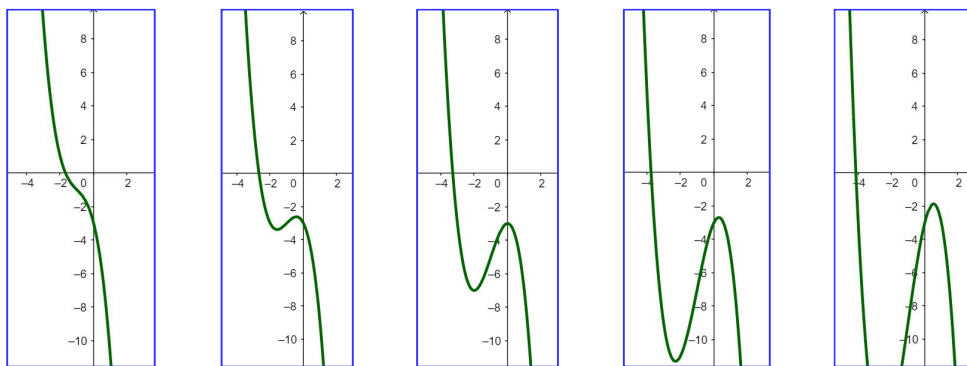
C. 若固定 a, b, c 係數 $(-1, -3, -2)$ ，只變化係數 d ，可發現圖形僅有垂直方向的平移。(下圖中， d 的值分別為 $-4, -2, 0, 2, 4$)



- D. 若固定 a, c, d 係數 $(-1, -2, -3)$ ，只變化係數 b ，可發現圖形的波峰波谷變異度有所變化。(下圖中， b 的值分別為 $-4, -2, 0, 2, 4$)

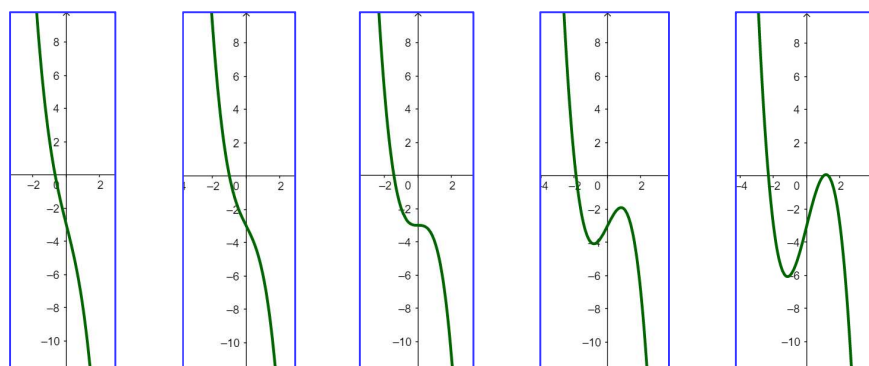


- E. 若固定 a, b, d 係數 $(-1, -3, -3)$ ，只變化係數 c ，可發現圖形的波峰波谷變異度有所變化。(下圖中， c 的值分別為 $-4, -2, 0, 2, 4$)

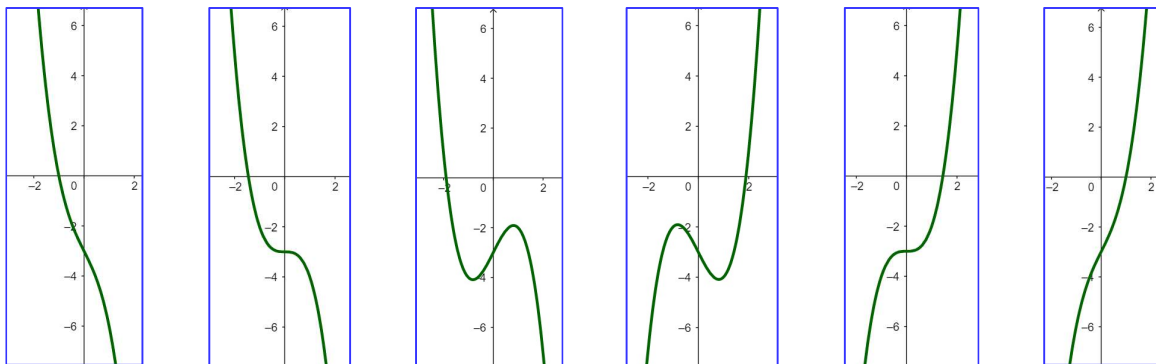


- F. 從觀察 D 與觀察 E 中，發現僅變動係數 b 或 c 並無法歸納出明確的特性。根據已學過的函數重整技巧，任意三次函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 均可重整為 $y = px^3 + qx + r$ ，將三次函數的四個係數簡化成三個係數。

- G. 依據觀察 F 的函數重整方式，除了先固定 a 與 d 係數 $(-1, -3)$ 之外，再將係數 b 設為 0 ，只變化係數 c ，可發現除了圖形的波峰波谷變異度有所變化外，函數圖形的對稱中心亦可維持不變。(下圖中， c 的值分別為 $-4, -2, 0, 2, 4$)

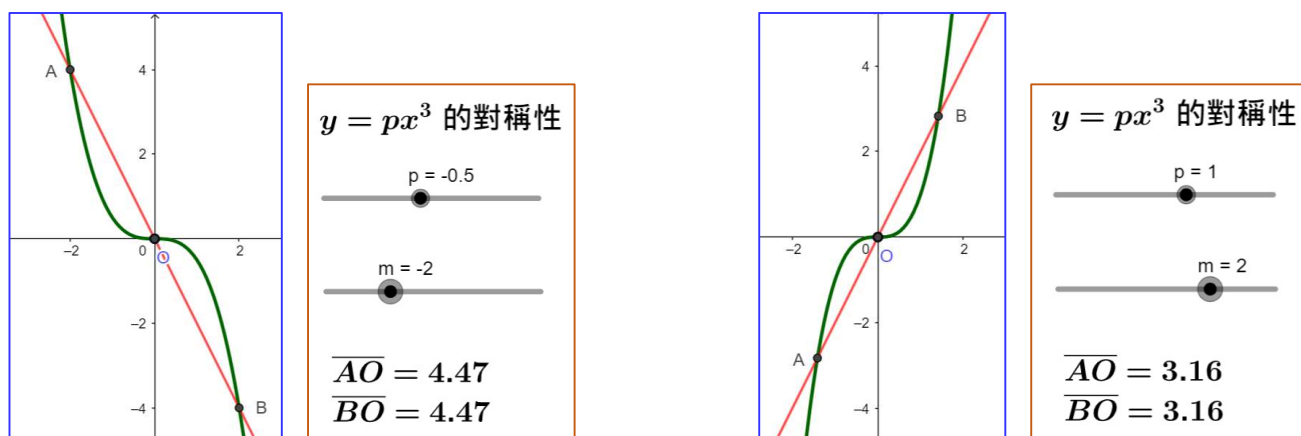


H. 除了常數係數 $d(-3)$ 之外，針對變數係數 a 與 c ，經過多種係數組合設定，可發現若 $a*c > 0$ ，則圖形維持遞增或遞減的走向；若 $a*c < 0$ ，才會有波峰波谷形狀的出現，而 $c=0$ 時，則在對稱中心附近有接近水平的走勢(其實是準備要出現峰谷狀態了)。下圖中 (a, c) 的值分別為 $(-1, -2), (-1, 0), (-1, 2), (1, -2), (1, 0), (1, 2)$ 。



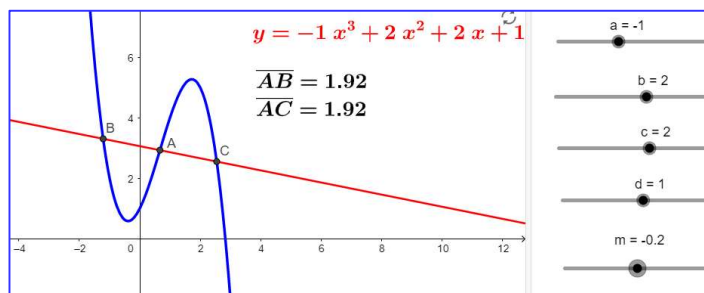
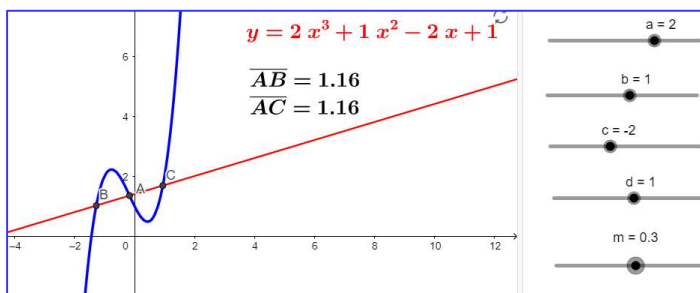
4. 三次函數的圖形必定具有對稱中心，也就是穿過對稱中心的任一直線，只要與三次函數圖形曲線有其他兩交點，對稱中心會落在其他兩交點的中心位置。

A. 可透過模擬軟體，先觀察簡單的三次單項函數 $(y=px^3)$ 的圖形，其對稱中心是原點，對於穿過對稱中心 O 的任意直線(可透過改變斜率 m 來指定)，若與三次函數圖形另有兩個交點 $(A \text{ and } B)$ ，則可看到 $\overline{AO}$ 與 $\overline{BO}$ 的距離長度相同。



B. 即使是三次函數的一般表示 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ，透過設定 a, b, c, d 不同的係數值，一樣可看到函數圖形具有對稱中心，且穿過對稱中心 A 的任意直線(斜率 m)與函數曲線的另兩個交點 $(B \text{ and } C)$ ，同樣具有

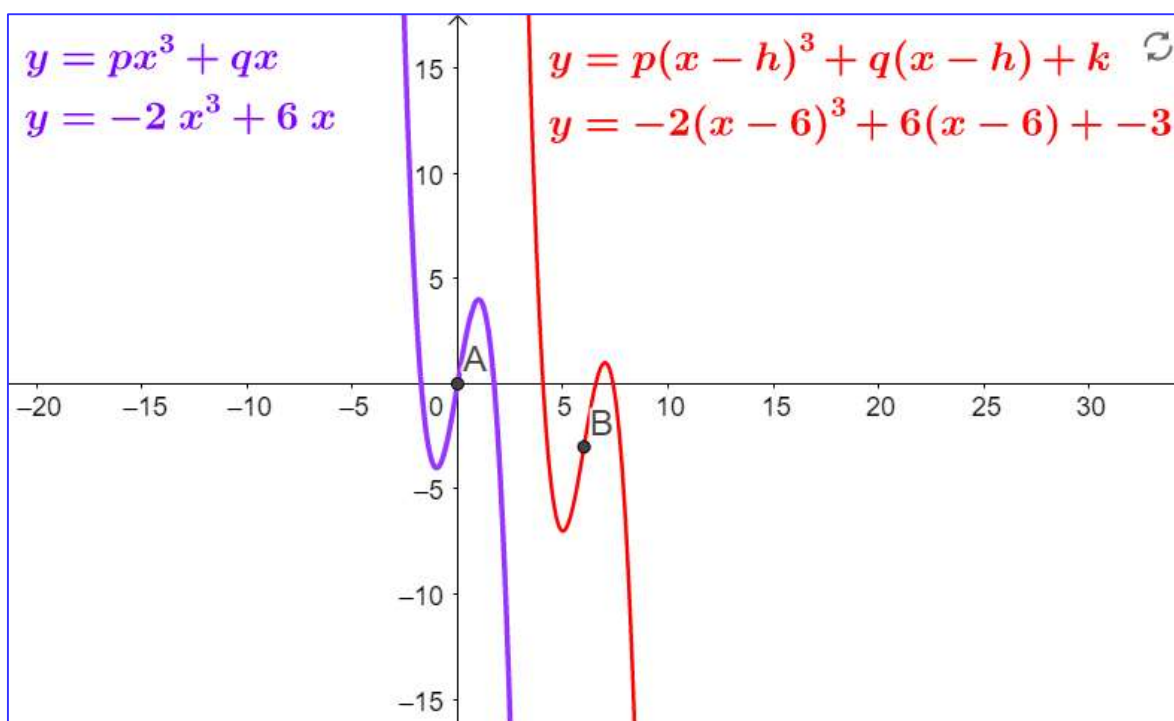
$\overline{AB} = \overline{AC}$ 的特性。



5. 由於三次函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 可以轉化成 $y = a(x - x_0)^3 + b(x - x_0) + y_0$ ，
三次函數的對稱中心就是 (x_0, y_0) 。

三次函數	$f_1(x) = x^3 + 5$	$f_2(x) = -10x^3 - 3$	$f_3(x) = -2x^3 + 5x - 6$	$f_4(x) = 2x^3 + x + 4$
對稱中心	$(0, 5)$	$(0, -3)$	$(0, -6)$	$(0, 4)$

6. 觀察兩個三次函數 $y = px^3 + qx$ 與 $y = p(x - h)^3 + q(x - h) + k$ ，其對稱中心會從 $A(0, 0)$ 移至 $B(h, k)$ 。也就是，雖然圖形雷同，但會往 (h, k) 的方向平移。



反思

1. 利用手動描點法畫出三次函數的平滑曲線，的確很費工，圖形也無法很精確。此次透過 GeoGebra 教學網站提供的工具，可以很方便地描繪出自行設定係數後的三次函數圖形曲線。
2. 透過細部觀察各種模擬的三次函數圖形曲線，可以很方便地分析出三次函數各係數對圖形曲線的影響性。
3. 透過細部觀察各種模擬的三次函數圖形曲線，可以很方便地分析出三次函數的對稱中心，以及函數圖形平移特性。
4. 最後，進行各種實際例題計算時，腦中很容易地浮現出對應的三次函數圖形曲線。對於例題計算結果，也很容易判斷出是否有明顯錯誤。所以，先透過圖形觀察與分析，對於實務例題的代數計算，有很大的學習助力。

附件一學習單

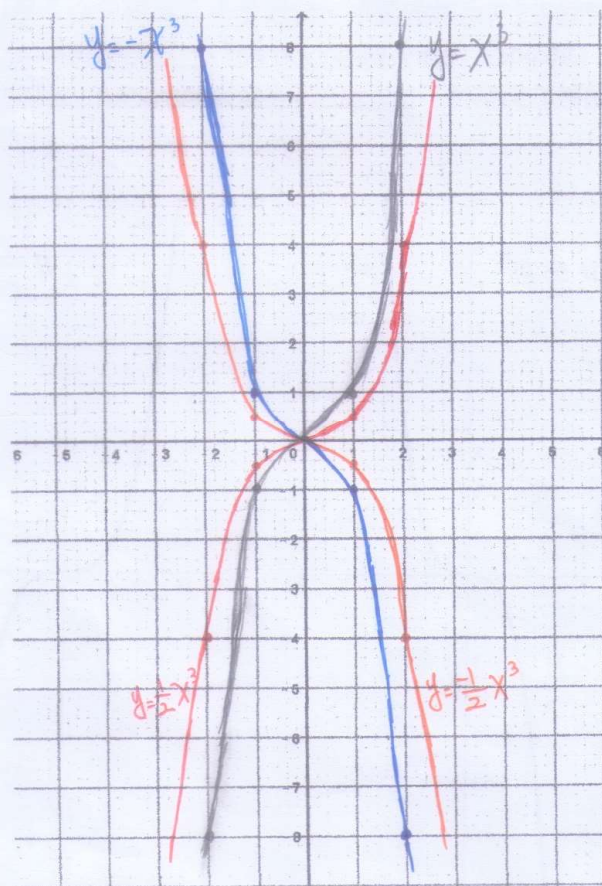
新竹市私立磐石高級中學 109 學年度第 1 學期 普一數學 ch11 學習單
PIA 39 曾雅庭.

三次函數的圖形特徵

壹、三次函數的圖形

【活動一】請使用描點法探索三次函數 $y = x^3$ 的圖形。

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8



班級：PIA 姓名：曾雁宸 座號：39

【活動二】

請完成下面表格並利用描點法和平滑曲線，
在方格紙中描繪下列三次函數的圖形。

x	$y = x^3$	$y = -x^3$	$y = \frac{1}{2}x^3$	$y = -\frac{1}{2}x^3$
-2	-8	8	-4	4
-1	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	0
1	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	8	-8	4	-4

我的觀察：

若 x^3 項的係數互為相反數，圖形對稱於 y 軸。

x^3 項之係數的絕對值越小，圖形越寬

以上四個圖形皆通過原點

【活動三】

請掃描右方 QRcode，在 discussion 方框中 $\checkmark$ ，藉由改變係數 p 的值，觀察並討論形如： $y = px^3$ ， $p \neq 0$ 的圖形特徵，並完成【結論一】。
(三次單項函數的圖形：<https://www.geogebra.org/m/bfmkh7kq>)



【結論一】

- (1) $p > 0$ ： $f(x) = px^3$ 為遞增函數，即 $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ，(填 $>$ ， $=$ 或 $<$) 左到右上升
- (2) $p < 0$ ： $f(x) = px^3$ 為遞減函數，即 $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ，(填 $>$ ， $=$ 或 $<$) 左到右降
- (3) 當 $|p|$ 越大，則函數值 $f(x) = px^3$ 的增、減速度會越 快，(填“快”或“慢”)
- (4) $y = px^3$ 與 $y = -px^3$ 的圖形對稱於 y 軸。

【活動四】

請掃描右方 QRcode，藉由改變係數 a 、 b 、 c 、 d 的值，觀察並討論 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 圖形類型。
(三次函數圖形類型的觀察：<https://www.geogebra.org/m/yseycpud>)



$a > 0$		$a < 0$	
1. 遞增	2. 波峰波谷	3. 遞減	4. 波峰波谷

提問 1：分別以 $a > 0$ 和 $a < 0$ ，觀察函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形有何共同特徵？

若 $a > 0$ ： $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 圖形右方上升

$a < 0$ ： $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 圖形右方下降

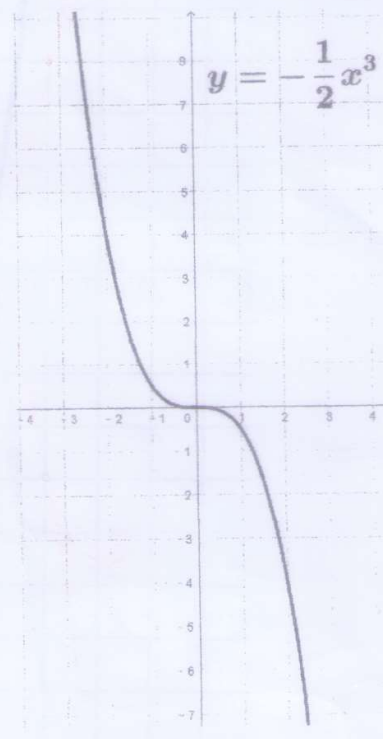
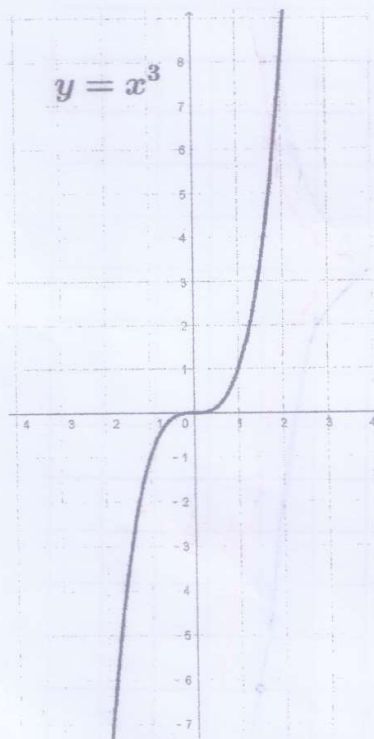
只要將一般式 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 化成 $y = px^3 + qx + k$

【活動五】

(1) 請觀察下方兩個三次函數的圖形，分別是否有對稱中心？請以你的方式說明之。

(2) 請掃描右方 QRcode，操作並觀察 $y = px^3$ 的點對稱情形。

(三次單項函數的對稱性：<https://www.geogebra.org/m/wmshvqka>)



結論二.

三次函數 $y = px^3$ ($p \neq 0$) 的圖形對稱於 $(0,0)$

【活動六】三次函數的對稱中心的觀察

- (1) 請掃描右方 QRcode，藉由改變係數 a 、 b 、 c 、 d 的值，觀察三次函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ， $a \neq 0$ 的圖形是否皆有對稱中心？ 是
(三次函數對稱中心的觀察：<https://www.geogebra.org/m/j76vp9vn>)



- (2) 改變直線斜率 m ，觀察 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的長度關係。

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

【活動七】

利用 GGB 操作型如： $y = px^3 + qx$ ， $p \neq 0$ ，的函數，找到下列四個圖形類型的一個例子。

p	$p > 0$		$p < 0$	
類型	1. 遞增	2. 波峰波谷	3. 遞減	4. 波峰波谷
例子 (函數)	$y = x^3 + x$	$y = x^3 - 4x$	$y = -x^3 - x$	$y = -x^3 + 4x$
圖形				
$p \cdot q$ 的條件	$p \cdot q \geq 0$	$p \cdot q < 0$	$p \cdot q \geq 0$	$p \cdot q < 0$

提問 2：與【活動四】比較， $y = px^3 + qx$ 與 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形類型是不是有同樣的類型呢？

有

叁、三次函數的平移

例題演練 1:

(1) 請回答下列三個函數的對稱中心的坐標。

三次函數	$f_1(x) = x^3 + 5$	$f_2(x) = -10x^3 - 3$	$f_3(x) = -2x^3 + 5x - 6$	$f_4(x) = 2x^3 + x + 4$
對稱中心	$(0, 5)$	$(0, -3)$	$(0, -6)$	$(0, 4)$

(2) 請掃描右方 QRcode，操作並驗證你在(1)中的答案，並完成【結論四】。

($y = px^3 + qx + k$ 對稱中心的觀察：<https://www.geogebra.org/m/dnxgva4i>)



【結論三】

我們知道三次函數 $y = px^3 + qx$ 的對稱中心為原點 (單項函數 $y = ax^3$ 為 $c = 0$ 的情形)，而透過鉛直平移，可得 $y = px^3 + qx + k$ 的對稱中心坐標為 $(0, k)$ 。

【活動八】

請掃描 QRcode，探究函數 $y = px^3 + qx$ 與 $y = p(x - h)^3 + q(x - h) + k$ 的圖形與對稱中心的平移關係。(三次奇函數的平移：<https://www.geogebra.org/m/sfechkpf>)

對稱中心 $(0, 0) \Rightarrow (h, k)$



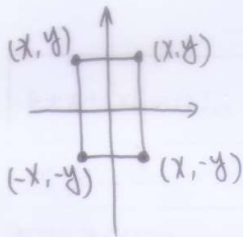
例題演練 2:

設三次函數 $f(x) = -x^3 + 3x$ ，應用【活動八】說明 f 如何平移至與下列函數重合，並求出其對稱中心。

(1) $h(x) = -(x - 2)^3 + 3(x - 2) + 3$, $(2, 3)$

(2) $g(x) = -(x + 5)^3 + 3(x + 5) - 1$, $(-5, -1)$

奇函數:



$$\Rightarrow \begin{cases} y = f(-x) \Rightarrow (-x, y) \\ -y = f(x) \Rightarrow (x, -y) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 每個點對稱於原點 $\Rightarrow$ 圖形對稱於原點

多項式中, 每項皆為奇次方 $\Rightarrow$ 奇函數

結論

① $y = f(x) = ax^3$ 為奇函數, 圖形對稱於原點 (對稱中心), 且原點左、右兩側圖形彎曲方向相反

② 逆時針方向 (圖), 係數 a 變大

③ $a > 0$ 時, $f(x) = ax^3$ 為遞增函數, 圖形右側上升

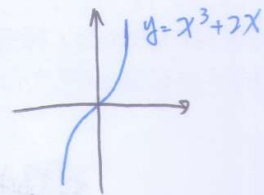
$a < 0$ 時, $f(x) = ax^3$ 為遞減函數, 圖形右側下降

$y = f(x) = ax^3 + px$ 圖形: $y = f(x) = ax^3 + px$ 為奇函數, 圖形必對稱於原點

若 a, p 同號 ($ap > 0$)

例: $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow$ 令 $x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (恰一實根)

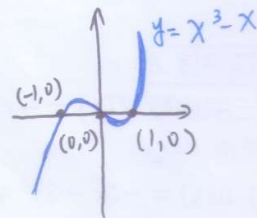
$\Rightarrow$ 圖形與 x 軸恰交於一點, 此點為 $(0, 0)$



若 a, p 異號 ($ap < 0$)

例: $f(x) = x^3 - x \Rightarrow$ 令 $x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1$ (恰三實根)

$\Rightarrow$ 圖形與 x 軸恰三個交點, 交點為 $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$



整理的不錯!

A⁺