

CH2 直線與圓

2-1 直線方程式及其圖形

一、直線的斜率

1. 斜率是一個可以代表直線傾斜程度的實數，由它的大小與正負可以判斷這條直線的傾斜情形。
2. 坐標平面上，不是鉛垂線的直線都具有斜率（可以計算斜率），而鉛垂線的斜率則不存在。
3. 設 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 為直線 L 上的相異兩點且 $x_1 \neq x_2$ ，則 L 的斜率為

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}。$$

4. 設直線 $L: ax + by + c = 0$, $b \neq 0$ ，則 L 的斜率為 $m = -\frac{a}{b}$ 。
5. 設直線 $L: y = mx + k$ ，則 L 的斜率為 m 。

二、截距

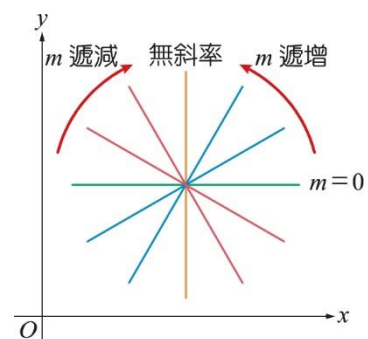
1. x 截距：直線與 x 軸交點的 x 坐標。
2. y 截距：直線與 y 軸交點的 y 坐標。

註：(1) 截距可正、可負、可為 0。

(2) x （或 y ）截距為 0 表示直線過原點。

三、直線方程式

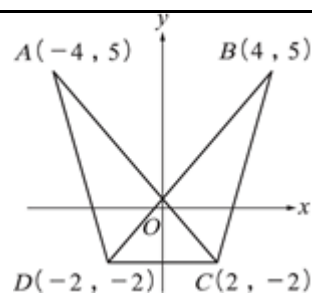
1. 點斜式：過點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的直線方程式為 $y - y_0 = m(x - x_0)$ 。
2. 截距式：設直線 L 的 x 截距為 a ， y 截距為 b ，且 $ab \neq 0$ ，則 L 的方程式為 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 。
3. 一般式： $ax + by + c = 0$ 。



範例 1 斜率的定義及斜率比大小

如右圖，若直線 AC 、直線 BD 、直線 AD 、直線 BC 、直線 CD 的斜率分別為 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 、 m_5 ，則：

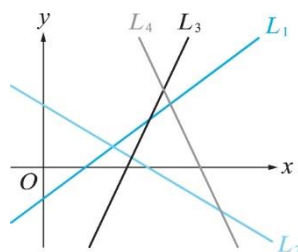
- (1) 求五個斜率之值。
- (2) 比較五個斜率的大小順序為_____。



解題技巧：求斜率時注意相減的順序要一致，比大小時要先以正負分類，再分類比大小。

練習 1

- (1) 坐標平面上四點 $A(1, 1)$, $B(1, 5)$, $C(4, 1)$, $D(7, 6)$ ，試求：
① 直線 AB 的斜率為_____。 ② 直線 CD 的斜率為_____。
- (2) 如圖所示，若 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 分別為直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 的斜率，試比較 m_1 ， m_2 ， m_3 ， m_4 的大小為_____。



範例 2 由直線方程式求斜率、截距及直線方程式的應用

已知直線 L 的方程式為 $x - 2y + 10 = 0$ ，試問：

- (1) 直線 L 的斜率為_____。
- (2) 直線 L 的 x 截距為_____， y 截距為_____。
- (3) 直線 L 與 x 軸、 y 軸所圍成的三角形面積為_____。

解題技巧：注意直線方程式的型式再確認怎麼找出斜率。令 $x=0$ ($y=0$) 代入可得 y 截距 (x 截距)。

練習 2

已知直線 L 方程式為 $2x - y + 3 = 0$ ，試求：

- (1) L 的斜率為_____。
- (2) x 截距為_____， y 截距為_____。
- (3) 直線與 x 軸、 y 軸所圍成的三角形面積為_____。

範例 3 直線方程式

- (1) 試求通過 $P(-2, 3)$ 、 $Q(0, -1)$ 兩點的直線方程式為_____。
- (2) 若直線 L 的斜率為 -2 且 x 截距為 3 ，則直線 L 的方程式為_____。
- (3) 若一直線的 x 截距為 -3 ， y 截距為 4 ，則此直線方程式為_____。

解題技巧：務必記住點斜式、截距式的直線方程式公式。

練習 3

- (1) 直線 M 過點 $A(2, 1)$ 及點 $B(-1, 4)$ ，則直線 M 的方程式為_____。
- (2) 試求出斜率為 -2 且 x 截距為 4 的直線方程式為_____。
- (3) 試求 x 截距為 -3 且 y 截距為 1 的直線方程式為_____。

四、直線的平移

已知坐標平面上一條直線 $L: y=mx$ (通過原點), $h, k > 0$:

1. 直線上下平移:

直線 $y=mx$ 向上平移 k 個單位, 得直線 $y=mx+k$; 向下平移 k 個單位, 得直線 $y=mx-k$ 。

2. 直線左右平移:

直線 $y=mx$ 向左平移 h 個單位, 得直線 $y=m(x+h)$; 向右平移 h 個單位, 得直線 $y=m(x-h)$ 。

五、兩直線關係

假設坐標平面上兩相異直線 L_1, L_2 (非鉛垂線) 的斜率分別為 m_1, m_2 , 則:

1. 兩平行直線的斜率相等:

若 $L_1 // L_2$, 則 $m_1 = m_2$ 。反過來說, 若 $m_1 = m_2$, 則 $L_1 // L_2$ 。

2. 兩垂直直線的斜率乘積為 -1 :

若 $L_1 \perp L_2$, 則 $m_1 m_2 = -1$ 。反過來說, 若 $m_1 m_2 = -1$, 則 $L_1 \perp L_2$ 。

範例 4 直線方程式的平移

已知直線 L 的方程式為 $3x - y + 5 = 0$, 在坐標平面上, 若將直線 L 的圖形向左平移 2 單位, 再向上平移 3 單位, 會與直線 L' 的圖形重疊, 則直線 L' 的方程式為_____。

解題技巧: 先將直線整理成 $y=mx+n$ 的形式再來移動。

練習 4

將直線 $L: 2x - y = 0$ 向左平移 3 個單位, 再向上平移 4 個單位, 則新直線方程式為_____。

範例 5 兩直線平行或垂直

設直線 L_1 的方程式為 $2x - 3y + 8 = 0$, 直線 L_2 的方程式為 $x + ky + 5 = 0$, 試求:

(1) 若直線 L_1 與直線 L_2 平行, 則實數 $k =$ _____。

(2) 若直線 L_1 與直線 L_2 垂直, 則實數 $k =$ _____。

解題技巧: 平行線斜率相等, 垂直線斜率乘積為 -1 。

練習 5

已知直線 $L: 3x + 2y - 4 = 0$, $L_1: 6x + hy = 0$, $L_2: 6x + ky = 0$, 其中 h, k 均為實數, 試求:

(1) 若直線 L 與直線 L_1 平行, 則 h 值為_____。

(2) 若直線 L 與直線 L_2 垂直, 則 k 值為_____。

範例 6 兩直線平行或垂直的假設

已知直線 L 的方程式為 $3x-4y-10=0$ ，試求：

- (1) 若直線 L_1 通過點 $A(1, 2)$ 且與直線 L 平行，則直線 L_1 的方程式為_____。
- (2) 若直線 L_2 通過點 $B(-2, 5)$ 且與直線 L 垂直，則直線 L_2 的方程式為_____。
-

解題技巧：平行線 x 、 y 項皆不變，垂直線 x 、 y 項係數數字對調， y 項前面再變號。

練習 6

已知直線 L 的方程式為 $2x-3y-5=0$ ，試求：

- (1) 若直線 L_1 通過點 $A(3, -2)$ 且與直線 L 平行，則直線 L_1 的方程式為_____。
- (2) 若直線 L_2 通過點 $B(3, 2)$ 且與直線 L 垂直，則直線 L_2 的方程式為_____。

範例 7 不能圍成三角形

若三直線 $L_1: x+3y-1=0$ ， $L_2: x-y+3=0$ ， $L_3: 2x+ky+1=0$ ，不能圍成一個三角形，則 k 之值為_____。

解題技巧：三直線不能圍成三角形：1.至少有兩直線平行或重合。2.三直線共點。

練習 7

設實數 $a>0$ 。若三直線 $L_1: 2x-y=1$ ， $L_2: x-2y=a$ ， $L_3: x-ay=122$ 共點，則 $a=_____$ 。

範例 8 過定點與相交問題

- (1) 若對任意實數 k ，直線 $(3k+2)x+(k-1)y-(4k+1)=0$ 恆過一定點，試求此定點的坐標。
- (2) 設平面上有三點 $A(7, -1)$ ， $B(4, 6)$ ， $C(0, 5)$ ，若直線 $(3k+2)x+(k-1)y-(4k+1)=0$ 與 $\triangle ABC$ 不相交，試求 k 的範圍。

解題技巧：按 k 整理求定點，再算頂點斜率判斷範圍。

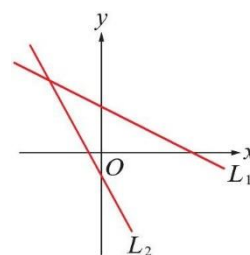
練習 8

- (1) 不論 m 為任何實數，直線 $L: y=mx+m-2$ 恆過定點 P ，則定點 P 的坐標為_____。
- (2) 承(1)，已知 $A(3, 2)$ 、 $B(-2, 4)$ ，若直線 L 與 $\overline{AB}$ 相交，則 m 之範圍為_____。

範例 9 斜率與截距的應用

如右圖，兩直線 L_1 、 L_2 之方程式分別為 $L_1: x+ay+b=0$ 、
 $L_2: x+cy+d=0$ ，請選出正確的選項。

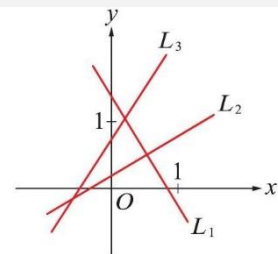
- (A) $a < 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $d > 0$ (E) $c > a$ 。



練習 9

如右圖，三直線 $L_1: y = ax + b$ ， $L_2: cx + dy = 1$ ， $L_3: ex + fy = 1$ ，請選出正確的選項。(單選)

- (A) $ab > 0$ (B) $cd > 0$ (C) $c > e$ (D) $bf > 1$ (E) $ad > -1$ 。

**範例 10 兩坐標軸所圍的三角形面積**

試求斜率為 -2 且兩坐標軸所圍成的三角形面積為 4 的直線方程式為_____。

練習 10

若直線 L 過 $P(2, 1)$ 且在坐標軸上的截距和為 6 ，則直線與兩軸圍成的三角形面積可能為何？

★綜合練習

- 坐標平面上五點 $A(1, 1)$, $B(1, 5)$, $C(4, 1)$, $D(7, 6)$, $E(3, -2)$, 試求：
 - 直線 AB 的方程式為【 】。
 - 直線 AC 的方程式為【 】。
 - 若直線 AC 的斜率為 m_1 , 直線 AD 的斜率為 m_2 , 直線 AE 的斜率為 m_3 , 則 m_1, m_2, m_3 的大小順序為【 】。

- 過點 $(1, -3)$, $(-2, 3)$ 的直線方程式為【 】。

- 若直線 L_1 的斜率為 3 且 y 截距為 -5 , 則直線 L_1 的方程式為【 】。
 - 若直線 L_2 的 x 截距為 5, y 截距為 -3 , 則直線 L_2 的方程式為【 】。

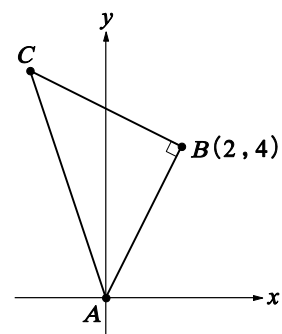
- 坐標平面上兩點 $P(5, 3)$, $Q(3, -1)$, 試問：
 - 直線 PQ 的斜率為【 】。
 - 若有一直線 L 的斜率為 $-\frac{1}{2}$ 且通過 $\overline{PQ}$ 的中點, 則直線 L 的方程式為【 】。
 - 承(2), 若直線 L 與 y 軸交於 R 點, 則 $\triangle PQR$ 的面積為【 】。

- 已知坐標平面上一直線 $L: y = ax + 5$, 若將直線 L 向右平移 2 單位, 再向下平移 3 單位, 會與直線 $L': y = -2x + b$ 重合, 則數對 $(a, b) =$ 【 】。

- 已知坐標平面上一直線 $L: 6x + 8y + 5 = 0$, 一點 $P(2, 3)$, 試問：
 - 若直線 L_1 通過點 P 且與直線 L 平行, 則直線 L_1 的方程式為【 】。
 - 若直線 $L_2: 4x + py + q = 0$ 與直線 L 垂直且通過點 P , 則數對 $(p, q) =$ 【 】。

- 如右圖, $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形, A 點為原點, B 點坐標為 $(2, 4)$, 試問：

- 直線 BC 的方程式為【 】。
 - 若將直線 BC 向下平移 k 單位後會通過 A 點, 則 $k =$ 【 】。

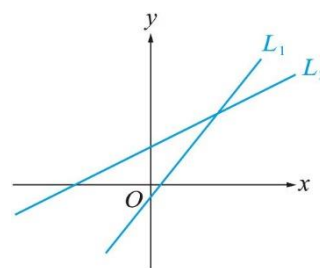


- 已知三角形 ABC 的三頂點為 $A(-1, 3)$, $B(6, 0)$, $C(4, 6)$ 。
 - 試求 BC 邊上的中線方程式【 】。
 - 試求 BC 邊上高的直線方程式【 】。
 - 試求 BC 邊上的中垂線方程式【 】。

9. 如圖，兩直線 L_1 、 L_2 之方程式分別為 $L_1: x-ay+b=0$ 、 $L_2: cx-y+d=0$ 。

(1) 試判斷 a, b, c, d 的正負號。【

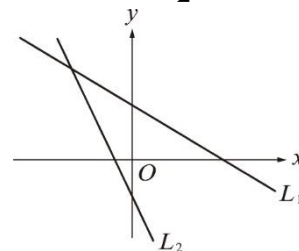
(2) 比較 ac 與 1 的大小。(提示： L_1, L_2 不平行)【



10. 設 $A(0, 0)$ 、 $B(10, 0)$ 、 $C(10, 6)$ 、 $D(0, 6)$ 為坐標平面上的四個點。如果直線 $y=m(x-7)+4$ 將四邊形 $ABCD$ 分成面積相等的兩塊，則 $m=$ 【 】。[學測]

11. 已知平面上三點 $A(3, 0)$ 、 $B(-2, 1)$ 、 $C(-7, 6)$ ，則過 B 點且將 $\triangle ABC$ 的面積平分的直線方程式為 【 】。

12. 如圖，兩直線方程式分別為 $L_1: ax+by+1=0$ 、 $L_2: cx+dy+1=0$ ，請選出正確的選項。(單選)
(A) $a>0$ (B) $b>0$ (C) $c<0$ (D) $d<0$ (E) $c>a$ 。【 】



13. 直線 L 不通過第四象限，且與直線 $5x-12y=2023$ 平行。若直線 L 與兩軸所圍成的三角形面積為 $\frac{10}{3}$ ，則直線 L 方程式為 【 】。