

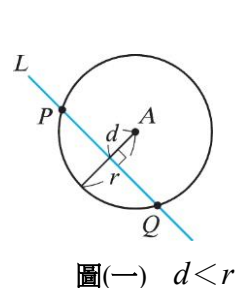
2-4 圓與直線的關係

一、圓與直線的關係

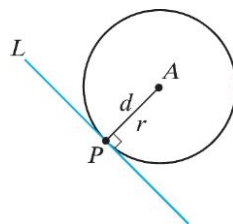
1. 幾何判別法：

設圓 C 的圓心為點 A ，半徑為 r ，圓心 A 到直線 L 的距離為 d 。由 d 與 r 的大小關係可以歸納出下列三種情形：

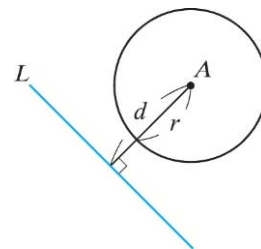
- (1) 若 $d < r$ ，則圓 C 與直線 L 交於兩點，如圖(一)。
- (2) 若 $d = r$ ，則圓 C 與直線 L 相切，如圖(二)。
- (3) 若 $d > r$ ，則圓 C 與直線 L 不相交，如圖(三)。



圖(一) $d < r$



圖(二) $d = r$



圖(三) $d > r$

2. 代數判別法：

考慮聯立方程式 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+dx+ey+f=0 \end{cases}$ ，整理後可得 $Ax^2+Bx+C=0$ ，則：

- (1) 當 $B^2-4AC > 0$ 時，聯立方程式有兩組相異實數解，表示圓與直線交於相異兩點。
- (2) 當 $B^2-4AC = 0$ 時，聯立方程式有兩組相等實數解，表示圓與直線相切。
- (3) 當 $B^2-4AC < 0$ 時，聯立方程式無實數解，表示圓與直線不相交。

範例 1 圓與直線的關係

若直線 $L: 4x-3y+2a-1=0$ 與圓 $C: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$ 有交點，則 a 的範圍為_____。

解題技巧：利用點到直線的距離公式求出圓心到直線的距離，再與半徑做比較。

練習 1

- (1) 已知直線 $L: 3x-4y+k=0$ 與圓 $C: x^2+y^2+4x-6y-3=0$ ，若直線 L 與圓 C 不相交，則 k 值範圍為_____。
- (2) 圓 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上到直線 $L: x+y+1=0$ 的距離為 $\sqrt{2}$ 的點共有幾個？(單選)
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 0。

範例 2 弦長及弦中點

若直線 $L: x-y-2=0$ 與圓 $C: x^2+y^2=25$ 交於 A, B 兩點，則：

(1) $\overline{AB}$ 的中點坐標為_____。

(2) $\overline{AB} =$ _____。

練習 2

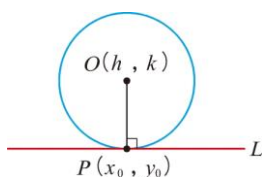
圓 $C: x^2+y^2=9$ 內一點 $A(2, 1)$ ，則過 A 點且長度為 5 的弦有幾條？(單選)

(A) 1 條 (B) 2 條 (C) 3 條 (D) 4 條 (E) 無限多條。

二、圓的切線

1. 過圓上一點的切線方程式：

設 $P(x_0, y_0)$ 是圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 上的一個定點，直線 L 為過點 P 的切線，利用 $\overline{OP} \perp L$ (即 $m_{OP} \times m_L = -1$) 可求出直線 L 的斜率 m_L ，則切線 L 的方程式為 $y - y_0 = m_L (x - x_0)$ 。

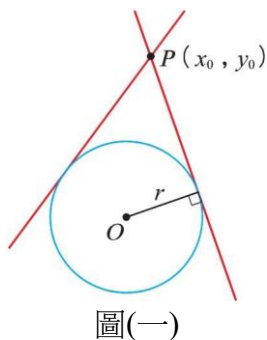


2. 過圓外一點的切線方程式：

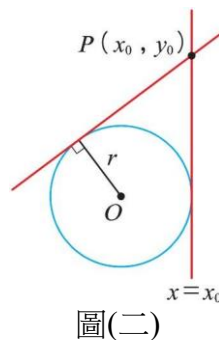
如圖(一)，設 $P(x_0, y_0)$ 為圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 外部一點，則可設切線

$L: y - y_0 = m(x - x_0)$ ，利用圓心至切線 L 的距離 = 半徑，可求出斜率 m 。

註：過圓外一點 P 必有兩條切線，若依上述的方法只能求出一條切線，則另一條切線為過 P 點的鉛垂線，如圖(二) (沒有斜率)。



圖(一)



圖(二)

3. 切線段長：

設 $P(x_0, y_0)$ 為圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 外部一點，則 P 至圓 C 的切線段長為 $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f}$ 。

註：此公式使用時，圓方程式之 x^2 與 y^2 項係數須為 1。

範例 3 圓的切線方程式(已知圓上一點)

已知圓 C 的方程式為 $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$ ，試求通過點 $A(-1, 1)$ 且與圓 C 相切的直線方程式為_____。

解題技巧：利用切線與半徑垂直，其兩斜率相乘等於 -1 ，求得切線斜率，再利用點斜式解之。

練習 3

試求過點 $P(-4, 4)$ 且與圓 $C: x^2 + y^2 + 10x - 4y + 24 = 0$ 相切之切線方程式為_____。

範例 4 圓的切線方程式（已知斜率 m ）

已知圓 C 的方程式為 $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$ ，試求斜率為 $-\frac{4}{3}$ 且與圓 C 相切的直線方程式為_____。

解題技巧：假設切線方程式為 $y = mx + k$ ，整理成一般式 $mx - y + k = 0$ ，利用圓心 O 到切線 L 的距離等於半徑 r ，即 $d(O, L) = r$ 可解得 k 。

練習 4

試求斜率為 2 且與圓 $x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0$ 相切的直線方程式為_____。

範例 5 圓的切線方程式（已知圓外一點）

已知圓 C 的方程式為 $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$ ，試求通過點 $B(-3, 6)$ 且與圓 C 相切的直線方程式為_____。

解題技巧：假設切線方程式為 $y - y_0 = m(x - x_0)$ ，整理成一般式後，利用圓心 O 到切線 L 的距離等於半徑 r ，即 $d(O, L) = r$ 可解得斜率 m 。

練習 5

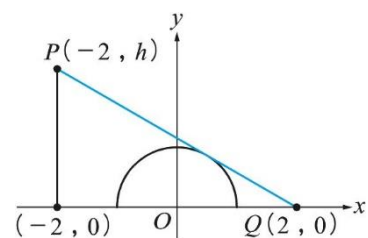
設圓 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ ，試求通過圓外一點 $P(6, -2)$ 且與圓 C 相切的直線方程式。

範例 6 應用問題

在坐標平面上 $(7, 5)$ 處有一光源，將圓 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 投射到 x 軸的影長為_____。

練習 6

如右圖，設 $h > 0$ ，點 $P(-2, h)$ 處有一光源， $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) 為半圓形障礙。若光源要照到點 $Q(2, 0)$ ，試求 h 的最小值。



範例 7 點到圓的切線段長及過切點的圓

坐標平面上自點 $P(-1, 3)$ 作圓 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 的兩切線，設切點分別為 A 、 B ，圓心為 O ，則：

(1) 切線段長 $\overline{PA} =$ _____ (2) $\triangle PAB$ 的外接圓方程式為 _____ (3) 四邊形 $AOBP$ 的面積為 _____。

解題技巧：直徑所對的圓周角為 90° 。

練習 7

過 $P(2, 3)$ 作圓 $C: x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ 的兩切線，切點為 A 、 B ，則：

(1) 切線段長 $\overline{PA} =$ _____。 (2) $\triangle PAB$ 的外接圓方程式為 _____。

★ 綜合練習

1. 若直線 $L: 2x + y + a - 3 = 0$ 與圓 $C: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ 有兩個交點，則 a 的範圍【 】。
2. 設圓 $C: x^2 + y^2 + 6x + by + c = 0$ 與直線 $L: 4x + 3y = a$ 相切於點 $P(1, 4)$ ，則序組 $(a, b, c) =$ 【 】。
3. 已知圓 C 的方程式為 $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ ，試問：
 - (1) 通過圓 C 上一點 $A(0, 5)$ ，且與圓 C 相切的直線方程式為【 】。
 - (2) 通過圓 C 外一點 $B(2, 4)$ ，且與圓 C 相切的直線方程式為【 】。
 - (3) 與直線 $L: 3x - 4y + 2 = 0$ 平行，且與圓 C 相切的直線方程式為【 】。
4. 設圓 C 的方程式為 $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = a$ ，直線 L 的方程式為 $y = bx + c$ ，若圓 C 與直線 L 相切於點 $P(6, 6)$ ，則序組 $(a, b, c) =$ 【 】。
5. 已知圓 C 的方程式為 $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$ ，若過點 $P(2, 3)$ 對圓 C 做兩切線，其切點分別為 Q, R ，則通過 P, Q, R 三點的圓方程式為【 】。
6. 若直線 $y = x + a$ 和圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$ 不相交，則 a 值的範圍為【 】。
7. 在坐標平面上，若有一直線 $L: 3x + y - 7 = 0$ 與圓 $C: (x + 1)^2 + y^2 = 20$ 相交於 A, B 兩點，則弦 $\overline{AB}$ 的垂直平分線 L' 方程式為【 】。
8. 垂直於直線 $x - y + 5 = 0$ 且與圓 $x^2 + y^2 = 2$ 相切的直線方程式為【 】。
9. 已知圓 $C: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ ，則：
 - (1) 自點 $Q(-5, 0)$ 向圓 C 作兩切線，得切點 A, B ，則切線段 $\overline{QA}$ 長為【 】。
 - (2) $\triangle QAB$ 的外接圓方程式為【 】。(以 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 的形式作答)