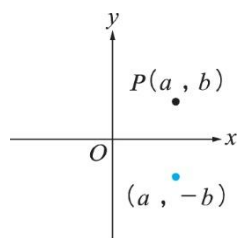


3-2 多項式函數及其圖形

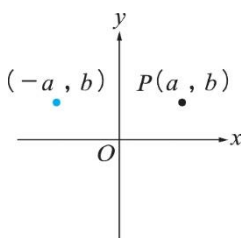
一、坐標圖形的對稱性

1. 設 $P(a, b)$ 為坐標平面上一點，則：

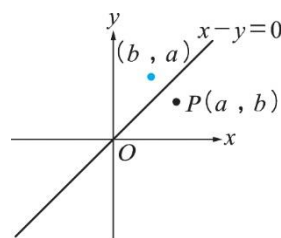
- (1) P 對 x 軸的對稱點為 $(a, -b)$ ，如圖(一)。
- (2) P 對 y 軸的對稱點為 $(-a, b)$ ，如圖(二)。
- (3) P 對直線 $x-y=0$ 的對稱點為 (b, a) ，如圖(三)。
- (4) P 對原點的對稱點為 $(-a, -b)$ ，如圖(四)。



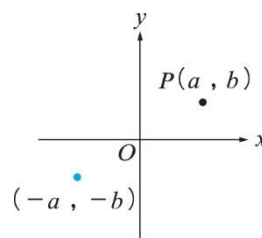
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

2. 平面上的中點坐標公式：

設 $P(a_1, b_1)$ ， $Q(a_2, b_2)$ ，則 $\overline{PQ}$ 的中點坐標為 $\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}\right)$ 。

範例 1 坐標的對稱性

坐標平面上， P 點坐標為 $(3, -5)$ ，則：

- (1) 點 P 對於 x 軸的對稱點為 P_1 ，點 P_1 對於 y 軸的對稱點為 P_2 ，則 P_2 的坐標為_____。
- (2) 點 P 對於原點的對稱點為 P_3 ，點 P_3 對於直線 $y=x$ 的對稱點為 P_4 ，則 P_4 的坐標為_____。

解題技巧：畫圖協助。

練習 1

已知坐標平面上一點 $P(1, 4)$ ，試求：

- (1) P 關於 x 軸的對稱點坐標為_____。
- (2) P 關於 y 軸的對稱點坐標為_____。
- (3) P 關於直線 $y=x$ 的對稱點坐標為_____。
- (4) P 關於原點 $O(0, 0)$ 的對稱點坐標為_____。

範例 2 求函數值

已知 $f(x) = 6x^2 - x + 3$ ，則：

- (1) $f(-2) =$ _____。
- (2) $f(x-1) =$ _____。

練習 2

已知 $f(x) = x^2 + 4x - 5$ ，則：

- (1) $f(2) =$ _____。
- (2) $f(x-2) =$ _____。

範例 3 函數的變化

已知 $f(x-1) = x^2 + 5x - 6$ ，則

(1) $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：將原式括號內的式子假設為求式括號內的數值或未知數，再將所得的 x 值代入算式中。

練習 3

已知 $f(x-2) = 3x^2 - 2$ ，則

(1) $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

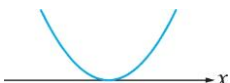
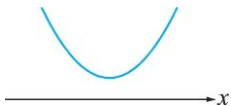
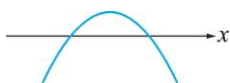
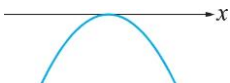
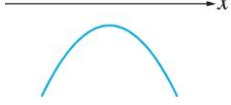
3. 二次函數圖形的分類：

若令判別式 $D = b^2 - 4ac$ ，

(1) $D > 0$ 時，圖形與 x 軸有兩交點。

(2) $D = 0$ 時，圖形與 x 軸有一交點。

(3) $D < 0$ 時，圖形與 x 軸不相交。

	$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
$a > 0$			(恆正) 
$a < 0$			(恆負) 

範例 4 一次函數之應用

小明班上的數學老師用一次函數來調整班上同學的數學成績，已知原本 40 分調整後變為 60 分，原本 50 分調整後變為 72 分，則小明原本的分數為 60 分，調整後變為 分。

解題技巧：依題意假設所需之一次函數，再代值解出。

練習 4

期中考後，由於數學成績不佳，老師決定全班每位同學的成績分別乘以 0.8，再加 20 分作調整。設原始成績為 x ，調整過後的成績為 y ，且已知全班同學的原始成績落在 20 分到 90 分之間。

(1) 試說明 y 是 x 的函數，並將此函數寫成 $y = f(x)$ 的形式為 。

(2) 若小明的分數在調整後為 60 分，則小明的原始分數為 。

範例 5 二次函數圖形的開口

右圖為三個共頂點的拋物線，其方程式分別為 $\Gamma_1: y=a_1(x-2)^2+1$ ，

$\Gamma_2: y=a_2(x-2)^2+1$ ， $\Gamma_3: y=a_3(x-2)^2+1$ ，試選出正確的選項。

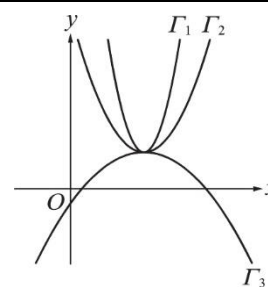
(A) $a_1 > 0$

(B) $a_2 < 0$

(C) $a_3 > 0$

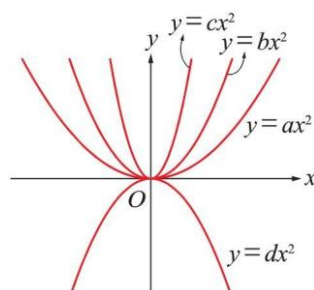
(D) $a_2 > a_1 > a_3$

(E) $a_1 + a_3 > 0$ 。



練習 5

如圖，坐標平面上有四個拋物線方程式的圖形，則 a 、 b 、 c 、 d 之大小順序為_____。



範例 6 二次函數配方法與平移問題

(1) 已知 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ ，利用配方法求頂點坐標為_____及最小值為_____。

(2) 承(1)題，試求將 $f(x)$ 依水平方向平移+3 單位，依鉛直方向平移-5 單位的函數為_____。

解題技巧：利用公式 $a^2 \pm (2b)a + b^2 = (a \pm b)^2$ 做配方法。

練習 6

(1) 已知 $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ，利用配方法求頂點坐標為_____及最小值為_____。

(2) 承(1)題，試求將 $f(x)$ 依水平方向平移-5 單位，依鉛直方向平移+2 單位的函數為_____。

範例 7 二次函數的平移問題(一)

設點 (a, b) 在圖形 $y=3x^2$ 上，則下列何者在圖形 $y=3x^2+12x+16$ 上？（單選）

- (A) $(3a, b)$ (B) $(3a-2, b)$ (C) $(a, b-4)$ (D) $(a-2, b+4)$ (E) $(a+2, b-4)$

練習 7

將 $y=-x^2-4x+3$ 之圖形水平向右平移 h 單位，再鉛直向上平移 k 單位，所得之圖形與 $y=-x^2+2x+4$ 重疊，則數對 $(h, k)=$ _____。

範例 8 二次函數的平移問題(二)

設 $\Gamma: y=5x^2$ ，將 Γ 平移至 Γ' ，已知 Γ' 為 $f(x)$ 且滿足 $f(x-3)=f(-x-3)$ ，對任意實數 x 均成立，又通過 $(-2, 6)$ ，試求 Γ' 之方程式為_____。

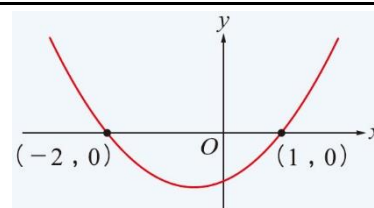
練習 8

設 $\Gamma: y=3x^2$ ，將 Γ 平移至 Γ' ，使 Γ' 通過 $(-2, 0)$ 與 $(2, -4)$ 兩點，則 Γ' 之方程式為_____。

範例 9 二次函數係數與圖形之關係

若函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形如右圖，則下列各數哪些為負數？

- (A) a (B) b (C) c
(D) b^2-4ac (E) $a-b+c$ 。

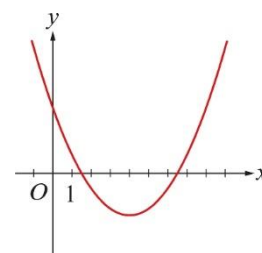


- 解題技巧：1. a ：開口方向。
2. b ：聯合 a 一起控制頂點的 x 坐標。
3. c ：與 y 軸之交點。
4. $D=b^2-4ac$ ：與 x 軸之交點數
5. 其他：代數字。

練習 9

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之圖形如右圖所示，則下列選項哪些正確？（多選）

- (A) $b<0$ (B) $c<0$ (C) $a+b+c<0$ (D) $a-b+c>0$
(E) $9a-3b+c<0$ 。



範例 10 二次函數的圖形

設 $f(x)=a(x-2)^2+k$ ，其中 a, k 為實數且 $f(5)<0, f(7)>0, f(\alpha)=f(\beta)=0$ 且 $\alpha \neq \beta$ ，則下列選項哪些正確？

- (A) $a<0$ (B) $k<0$ (C) $f(-3)<0$ (D) $f(0)>0$ (E) $\alpha+\beta>0$ 。

練習 10

設 a, b 均為實數，且二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$ ，滿足 $f(4)>0, f(5)<0$ ，試問下列何者為真？

- (A) $f(0)>0$ (B) $f(-1)>0$ (C) $f(-2)>0$ (D) $f(-3)>0$ (E) $f(-4)>0$ 。（多選）

範例 11 二次函數的應用

若二次函數 $f(x) = 2x^2 + 8x + k$ 之值恆為正數，則 k 的範圍為_____。

解題技巧：恆正或恆負判斷，需先注意首項係數狀況，再確認判別式小於 0。

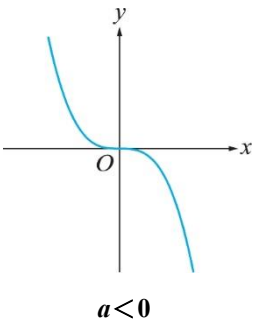
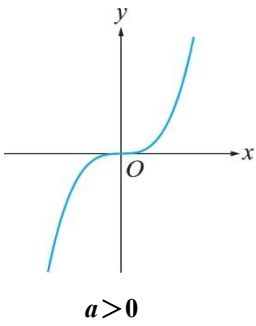
練習 11

若二次函數 $f(x) = -2x^2 + 8x + (k - 5)$ 的值恆為負數，則實數 k 的範圍為_____。

五、三次函數的圖形

1. $y = ax^3 + px$ 的圖形：

(1) $p = 0$ 時，圖形如下：



(2) $p \neq 0$ 時，圖形如下：

	$p > 0$	$p < 0$	圖形兩端走向
$a > 0$	圖(一)	圖(二)	最右方上升到無限大， 最左方下降到負無限大。
$a < 0$	圖(三)	圖(四)	最右方下降到負無限大，最左方上升到無限大。
圖形在 $x = 0$ 附近的走向	圖形在 $x = 0$ 附近往右上走。	圖形在 $x = 0$ 附近往右下走。	

圖形與 x 軸的交點數：

- ① ap 同號 ($ap > 0$) 時，圖形與 x 軸有 1 個交點，如圖(一)、圖(四)。
- ② ap 異號 ($ap < 0$) 時，圖形與 x 軸有 3 個交點，如圖(二)、圖(三)。

2. 三次函數圖形的平移：

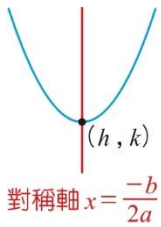
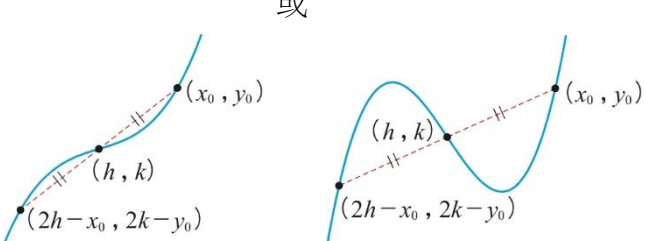
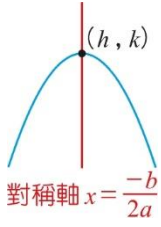
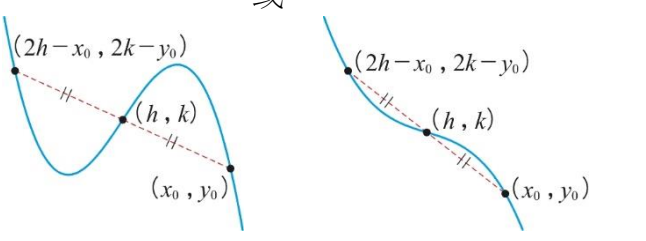
三次多項式函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 必可表示為 $y = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$ 的形式，其中

$h = -\frac{b}{3a}$ ，因此三次函數圖形就一定可以化為 $y = ax^3 + px$ 圖形的平移。

3. 一次近似：

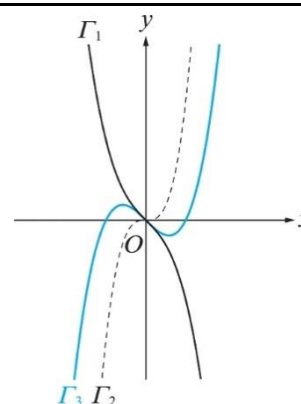
將實係數多項式函數 $y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 連續使用綜合除法可改寫為 $f(x)=a_n(x-h)^n+a_{n-1}(x-h)^{n-1}+\cdots+a_1(x-h)+a_0$ ，則 $y=a_1(x-h)+a_0$ 為 $y=f(x)$ 在 $x=h$ 附近的一次近似。

六、二次函數與三次函數圖形特徵的比較：

	二次函數 $y=ax^2+bx+c=a(x-h)^2+k$	三次函數 $y=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-h)^3+p(x-h)+k$
(h, k)	頂點為 $(h, k)=\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$	對稱中心 $(h, k)=\left(\frac{-b}{3a}, f\left(\frac{-b}{3a}\right)\right)$
$a > 0$		或 
$a < 0$		或 

範例 12 函數圖形的判斷

已知 $\Gamma_1: y=ax^3+bx$ ， $\Gamma_2: y=cx^3$ ， $\Gamma_3: y=dx^3+ex$ 的圖形如右圖，則 a, b, c, d, e 五數中為正數的有_____個。

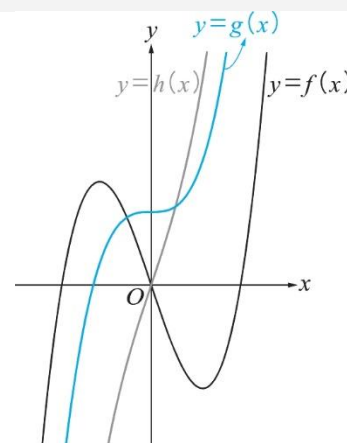


解題技巧：先視圖形以首項係數之正負做分類，再看 $f(x)=ax^3+px$ 的 $ap>0$ 或 $ap<0$ 判斷各係數情形。

練習 12

已知 $y=2x^3-3x$ ， $y=2x^3+3x$ ， $y=2x^3+1$ 的圖形如右圖所示，試完成各圖形配對（填入 $f(x)$ 、 $g(x)$ 或 $h(x)$ ）：

- (1) $y=2x^3-3x$ 的圖形是 $y=$ _____。
- (2) $y=2x^3+3x$ 的圖形是 $y=$ _____。
- (3) $y=2x^3+1$ 的圖形是 $y=$ _____。



範例 13 三次函數圖形的平移

已知函數 $f(x) = -x^3 + 7x$ ，若將 $f(x)$ 之圖形向水平方向平移 h 單位，再向鉛直方向平移 k 單位，則會與 $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 5x - 11$ 重合，則數對 $(h, k) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：左右移動改變 x ，上下移動改變函數值 y

練習 13

已知三次函數 $y = f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 9x + 5$ ，則：

- (1) 試將 $f(x)$ 表成 $a(x-h)^3 + p(x-h) + k$ 的形式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 若函數 $g(x)$ 的圖形向水平方向平移 h 單位，再向鉛直方向平移 k 單位後與 $y = f(x)$ 的圖形重合，則函數 $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (3) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 14 一次近似

已知函數 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 3$ ，試求：

- (1) 若 $f(x) = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$ ，則序組 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 此函數在 $x=2$ 附近的一次近似為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：連續利用綜合除法。

練習 14

試求 $y = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$ 在 $x = -1$ 附近的一次近似為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 15 大域特徵與一次近似

設三次函數 $y=f(x)=a(x-4)^3+b(x-4)^2+c(x-4)+d$ ，當 x 很大時， $y=f(x)$ 的圖形很接近 $y=-2x^3$ ，又在 $x=4$ 附近的圖形近似於直線 $y=-5x-2$ ，若函數圖形的對稱中心在 $x=3$ 處，則序組 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

練習 15

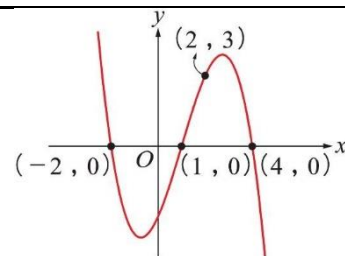
已知三次函數 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=2$ 附近的一次近似為 $y=5x+4$ ，其大域特徵與 $y=5x^3$ 近似，且 $f(1)=8$ ，試求序組 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 16 由圖形求出函數

設 $f(x)$ 為三次實係數多項式其部分圖形如右圖，則：

(1) $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $f(-6) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

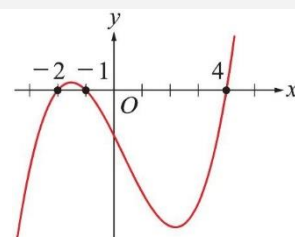


練習 16

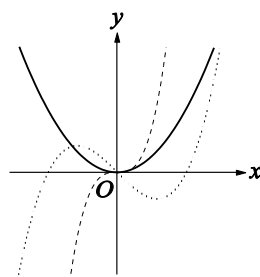
若三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 之圖形如右，且已知過 $(-2, 0)$ 、

$(-1, 0)$ 與 $(4, 0)$ ，則下列選項何者正確？（單選）

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $d > 0$ (E) $a+b+c+d > 0$ 。

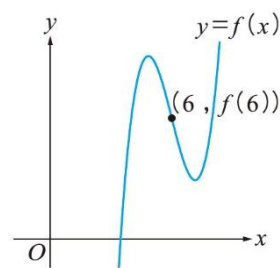


10. 已知 $\Gamma_1: y=ax^2$, $\Gamma_2: y=bx^3$, $\Gamma_3: y=cx^3+dx$ 的圖形如右圖, 則 a, b, c, d 四數中為正數的有【 】個。



11. 右圖為三次函數 $y=f(x)$ 的圖形, 其中 $(6, f(6))$ 是對稱中心, 則函數 $f(x)$ 可以是下列何者? (單選)【 】

- (A) $(x-6)^3+4(x-6)+6$ (B) $(x-6)^3-4(x-6)+6$
 (C) $-(x-6)^3+4(x-6)+6$ (D) $-(x-6)^3-4(x-6)+6$
 (E) $(x+6)^3-4(x+6)+6$



12. 已知函數 $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 7x + 4$, 試求:

- (1) 若 $f(x) = 3(x+a)^3 + b(x+a) + c$, 則序組 $(a, b, c) =$ 【 】。
 (2) 此函數圖形的對稱中心為【 】。

13. 已知函數 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x + 3$, 若想知道此函數在 $x=1$ 附近的一次近似, 進而求出在 $x=1.001$ 時函數 $f(x)$ 的近似值, 可由下列的步驟求出。

- (1) 步驟一: 先將此函數改寫為 $f(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$, 則序組 $(a, b, c, d) =$ 【 】。
 (2) 步驟二: 函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次近似為 $g(x) = c(x-1) + d = mx + n$, 則數對 $(m, n) =$ 【 】。
 (3) 步驟三: $f(1.001) \approx g(1.001) =$ 【 】。

14. 已知函數 $f(x) = -x^3 + 7x$, 若將 $f(x)$ 之圖形向右平移 2 單位, 再向下平移 5 單位, 則會與 $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 重合, 則序組 $(a, b, c, d) =$ 【 】。

15. 設 Γ 表示 $y = f(x) = x^3 - 6x$ 的圖形, 則下列選項哪些是正確的? (多選)

- (A) Γ 的圖形與 x 軸恰有一個交點 (B) $(0, 0)$ 是 Γ 圖形的對稱中心
 (C) 若 (a, b) 在 Γ 的圖形上, 則 $(-a, -b)$ 也在 Γ 的圖形上 (D) Γ 的圖形沒有最高點也沒有最低點
 (E) 將 Γ 的圖形向右平移 2 單位, 再向下平移 3 單位可得新函數 $y = (x+2)^3 - 6(x+2) - 3$ 。

16. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式, 其部分圖形如右圖, 則 $f(3) =$ 【 】。

