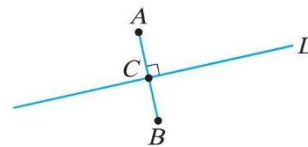


2-2 直線方程式的應用

一、投影點

平面上有 A 、 B 兩點，若 $\overline{AB}$ 被直線 L 垂直平分，則我們稱 B 為 A 關於直線 L 的對稱點；而 $\overline{AB}$ 與直線 L 的交點 C 稱為 A 在直線 L 上的投影點（或垂足）。



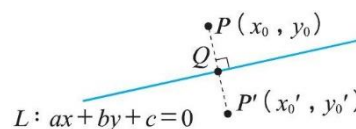
二、對稱點的求法：

若點 $P(x_0, y_0)$ 關於直線 $L: ax+by+c=0$ 的對稱點為 $P'(x_0', y_0')$ ，

①利用 $\overline{PP'}$ 垂直直線 L 且過 (x_0, y_0) 可得直線 PP' 。

②直線 PP' 與直線 L 的交點即是投影點 Q 。

③利用 Q 點為 P 、 P' 之中點求 P' 。



三、點到直線的距離公式

點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax+by+c=0$ 的距離為 $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

四、兩平行線的距離公式

兩平行線 $ax+by+c_1=0$ 和 $ax+by+c_2=0$ 之間的距離為 $\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

範例 1 投影點與對稱點

試求點 $A(-2, 3)$ 關於直線 $L: 3x-4y=7$ 的

(1) 投影點坐標 M 為_____。(2) 對稱點坐標 A' 為_____。

練習 1

在物理學上，光線反射時，入射角等於反射角。若已知兩點 $A(2, 3)$ ， $B(6, 1)$ ，一光線自 A 點射向 x 軸上一點反射後恰通過 B 點，試求該反射點坐標為_____。

範例 2 點到直線的距離

已知坐標平面上有一點 $A(5, -3)$ 與直線 $L: 2x+y=8$ ，則點 A 到直線 L 的距離為_____。

練習 2

已知坐標平面上有一點 $P(4, 1)$ 與直線 $L: 5x - 12y + 5 = 0$ ，則點 P 到直線 L 的距離為_____。

範例 2 兩平行線的距離

試求兩平行直線 $L_1: x + y - 4 = 0$ 及 $L_2: 3x + 3y + 6 = 0$ 間的距離為_____。

解題技巧：公式記熟，注意代公式前必須先將直線方程式整理為 x 、 y 的係數皆相同才能使用公式。

練習 2

已知兩條平行的直線 $L_1: 3x + 2y - 5 = 0$ ， $L_2: 6x + 4y + 16 = 0$ ，則直線 L_1 到直線 L_2 的距離為_____。

五、二元一次不等式的解

滿足二元一次不等式的實數對 (x, y) 稱為該不等式的解。二元一次不等式的解通常有無限多組，將其表示在坐標平面上，其解集合為一個半平面。

六、圖解二元一次不等式

■ 例如：描繪二元一次不等式 $ax + by + c \geq 0$ 或 $ax + by + c > 0$ 的圖形

令直線 $L: ax + by + c = 0$ ：

- (1) 先將直線 L 描繪在坐標平面上，不等式有等號畫實線，沒有等號畫虛線。
- (2) 選定直線 L 外一點（通常選擇原點），代入不等式。若不等式成立，則圖形為選擇之點所在的

範例 3 二元一次不等式的圖形

畫出 $\begin{cases} x + y - 4 \leq 0 \\ 2x - y + 2 \leq 0 \end{cases}$ 的圖形。

解題技巧：先畫出等於 0 時的直線，注意該畫實線或虛線，再代該線右半部或左半部的一點確認大於 0 或小於 0 的狀況。

練習 3

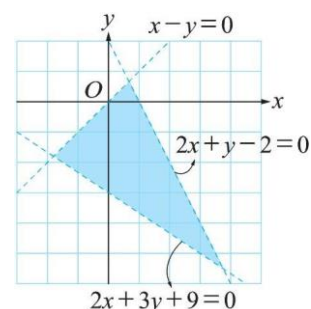
試在坐標平面上，畫出二元一次不等式 $\begin{cases} 2x-y-4 < 0 \\ 3x+y-11 > 0 \end{cases}$ 的圖形。

解：

範例 4 不等式解與圖形的關係(一)

右圖可用下列哪一組聯立不等式表示？

- (A) $\begin{cases} 2x+y-2 < 0 \\ x-y < 0 \\ 2x+3y+9 < 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2x+y-2 < 0 \\ x-y > 0 \\ 2x+3y+9 < 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 2x+y-2 < 0 \\ x-y < 0 \\ 2x+3y+9 > 0 \end{cases}$
- (D) $\begin{cases} 2x+y-2 < 0 \\ x-y > 0 \\ 2x+3y+9 > 0 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} 2x+y-2 > 0 \\ x-y < 0 \\ 2x+3y+9 < 0 \end{cases}$



解題技巧：直接從圖形判斷或帶點判斷。

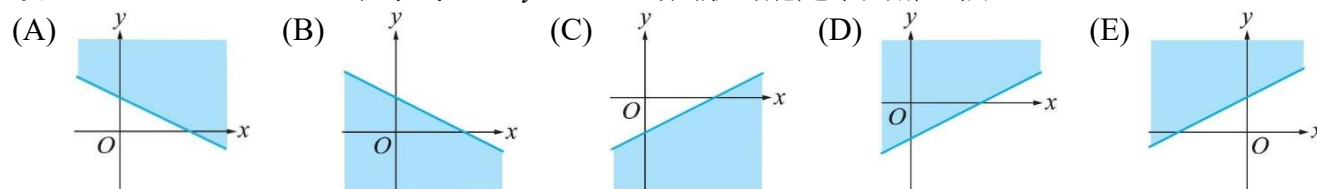
練習 4

下列哪一個聯立不等式所表示的圖形為一個三角形的內部區域？（多選） (C)(D)。

- (A) $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 3 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \\ x-y \geq 3 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x-2y \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq 3 \\ x-y \leq 3 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} x \leq 3 \\ y \geq 2 \\ x-y \leq 3 \end{cases}$ 。

範例 5 不等式解與圖形的關係(二)

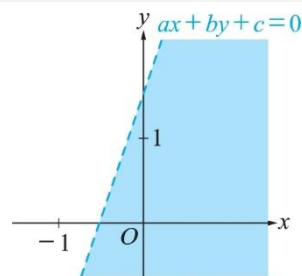
設 $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, 不等式 $ax+by+c \geq 0$ 的圖形可能是下列哪一個？



解題技巧：先由截距正負定出直線，再依符號判斷半平面。

練習 5

右圖是二元一次不等式 $ax+by+c>0$ 的圖形，試判斷 a, b, c 的正負。



範例 6 求範圍

若點 $P(k+1, 2k-1)$ 在聯立不等式 $\begin{cases} x+3y \leq 0 \\ 4x-y+1 \geq 0 \end{cases}$ 的圖形中，則 k 之最大可能範圍為_____。

解題技巧：將點坐標代入聯立不等式，解出未知數交集範圍。

練習 6

設 $A(5, 3)$ ， $B(-1, 3)$ ， $C(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ ，則：

(1) $\triangle ABC$ 區域（包含邊界）以聯立不等式表之為_____。

(2) 若點 $P(k-2, 2k-3)$ 在 $\triangle ABC$ 區域內（包含邊界），則 k 之範圍為_____。

範例 7 同側異側

坐標平面上，設直線 L 的斜率為 m ， y 截距為 3，若兩點 $A(-2, 1)$ 、 $B(1, 2)$ 在 L 的異側，則 m 之最大可能範圍為_____。

練習 7

坐標平面上，設直線 L 的斜率為 m ，且過點 $P(-3, -1)$ ，若兩點 $A(5, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 在 L 的異側，則 m 之最大可能範圍為_____。

範例 8 格子點問題

試求滿足聯立不等式
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ 3x + 5y \leq 25 \end{cases}$$
 圖形，且 x 、 y 坐標皆為整數的點（又稱為格子點）共有_____個。

練習 8

聯立不等式
$$\begin{cases} 0 < x < 5 \\ 0 < y < 6 \\ x + y \leq 7 \end{cases}$$
 的圖形區域中，共有_____個格子點。

★綜合練習

1.試求點 $A(3, -2)$ 關於直線 $L: x - 2y - 2 = 0$ 的

(1) 投影點坐標 M 為【 】。 (2) 對稱點坐標 A' 為【 】。

2. 已知坐標平面上有兩條直線 $L_1: 3x + 4y - 3 = 0$, $L_2: 6x + 8y - 31 = 0$, 試問:

(1) 直線 L_1 與直線 L_2 的距離為【 】。

(2) 若有一點 A 與 L_1 的距離為 1, 則此 A 點與 L_2 的距離為【 】。

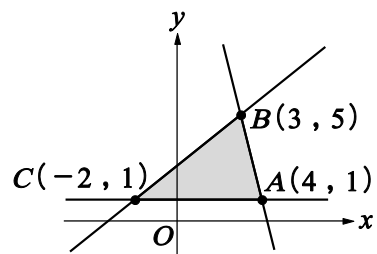
3. 已知坐標平面上一點 $P(-3, 5)$ 到直線 $L: 3x + 4y + k = 0$ 的距離為 3, 則 $k =$ 【 】。

4. 若點 $P(a+1, 2a-1)$ 在二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+5y-18 \geq 0 \\ 3x-2y-2 \leq 0 \end{cases}$ 的圖形內, 則 a 的範圍為【 】。

5. (1) 用來表示右圖陰影區域的不等式為【 】。

(2) 右圖的陰影區域 (含邊界) 中有【 】個格子點。

(x, y 坐標皆為整數的點即為格子點)



6. 設直線 $L: 2x + ay - 1 = 0$, 若 $A(3, -1)$, $B(-2, 5)$ 兩點所連成的線段 $\overline{AB}$ 與直線 L 有交點, 則 a 的範圍為【 】。

7. 設直線 $L: mx - y + 5m + 2 = 0$, 試問:

(1) 不論實數 m 之值為何, 直線 L 必過一點 P , 此 P 點坐標為【 】。

(2) 若點 $(1, 5)$ 在直線 L 上, 則 $mx - y + 5m + 2 > 0$ 的解之圖形區域為直線 L 的【 】半平面。
(請填入左或右)

8. 設 $A(3, -2)$, $B(-5, 1)$, 若線段 $\overline{AB}$ 與直線 $L: x - 4y + 4 = 0$ 相交於一點 P , 則 $\overline{AP} : \overline{BP} =$ 【 】。

9. 設點 $P(x, y)$ 為直線 $4x - 3y - 19 = 0$ 上的任意點，則 $\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2}$ 的最小值為【 】。

10. 已知正三角形 ABC 的一頂點 $A(3, -2)$ ，且 $\overline{BC}$ 在直線 $L: 4x - 3y - 3 = 0$ 上，則此正三角形 ABC 的面積為【 】。

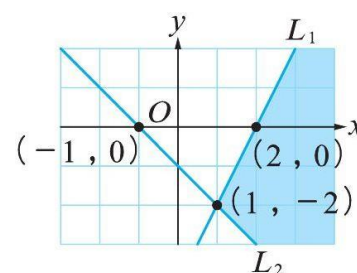
11. 設 $ABCD$ 為一正方形，若 $\overrightarrow{AB}: x + 3y = 4$ ， $\overrightarrow{BC}: 3x - y = 1$ ， $\overline{AD}$ 上一點 $P(5, -1)$ ，則 $\overrightarrow{CD}$ 的方程式為【 】。

12. 若二元一次聯立不等式 $\begin{cases} y \leq ax + b \\ y \geq cx + d \end{cases}$ 的圖形為右圖的陰影區域(包含邊

界)，則 a, b, c, d 之值下列何者正確？(多選)

(A) $a = 2$ (B) $b = -3$ (C) $c = -1$ (D) $d = 1$ (E) $c = d$ 。

答：【 】。



13. 設 $A(k, 2)$ 、 $B(-4, k)$ 兩點在直線 $L: 4x - 3y + 12 = 0$ 的同側，則實數 k 之範圍為【 】。

14. 平面上有 $A(2, 6)$ 、 $B(4, 2)$ 、 $C(6, 8)$ 、 $D(9, 5)$ ，且有一直線 $L: y = m(x - 1) + 3$ ，則 m 在哪個範圍時，可使 A, B, C, D 在直線 L 的兩側各有兩個點？(單選)

(A) $-\frac{1}{3} < m < \frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4} < m < 1$ (C) $1 < m < 3$ (D) $m < -\frac{1}{3}$ (E) $m > 3$ 。

答：【 】。