

CH1 實數與指對數

1-1 實數

一、有理數

1. 定義：可以表示成兩個整數相除的數，即形如 $\frac{m}{n}$ （其中 m, n 為整數，且 $n \neq 0$ ），稱為有理數。

所有整數都可以表示為有理數，而且方法不唯一。

2. (1) 有理數可以表示為有限小數或循環小數。

有理數化為最簡分數後，若分母的質因數只有 2 或 5，則可化為有限小數；若分母除了 2 或 5 還有其他質因數，則可化為循環小數。

(2) 有限小數或循環小數可化為分數。

二、無理數

定義：不循環的無限小數即為無理數。

範例 1 循環小數或有限小數化為有理數

(1) 試將下列小數化為最簡分數： $0.\overline{14} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 $2.\overline{356} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 $a = 0.\overline{275} + \frac{18}{55}$ ，則將 a 展開後小數點後第 2000 位數字為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：讓小數部分消失不見。

練習 1

試將下列小數化為最簡分數：

(1) $0.\overline{96} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $0.\overline{527} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 2 有理數稠密性之應用

已知 $\frac{2}{3} < \frac{a}{24} < \frac{7}{8}$ 且 $\frac{a}{24}$ 為最簡分數，則 a 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：通分讓分母變一樣。

練習 2

已知 $\frac{3}{5} < \frac{a}{12} < \frac{5}{6}$ 且 a 為整數，則 a 之值為_____。

範例 3 有理數化為有限小數的條件

若 $\frac{258x}{105}$ (x 為個位數字) 可化為有限小數，則 x 之值為_____。

解題技巧：分母只能由 2 或 5 組成。

練習 3

(1) 若 $\frac{1x4}{15}$ (x 為十位數字) 可化為有限小數，則 x 之值為_____。

(2) 若 $\frac{3x54}{55}$ (x 為百位數字) 可化為有限小數，則 x 之值為_____。

(3) 若六位數 $92a92b$ 可被 9 整除，則 $a+b$ 之值可能為 (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9
〔92.學測(補考)〕

範例 4 有理數與無理數的運算性質

已知 a 為有理數， b 為無理數，若下列選項之運算皆有意義，則哪些選項之值必為無理數？

(A) $a+b$ (B) $a-b$ (C) ab (D) $\frac{a}{b}$ (E) $\frac{b}{a}$

解題技巧：可代數字判斷。

練習 4

下列選項何者正確？(單選)

(A) 若 $a+b$ 、 $a-b$ 皆為有理數，則 a 、 b 也皆為有理數 (B) 若 ab 、 $\frac{a}{b}$ 皆為有理數，則 a 、 b 也皆為有理數 (C) 若 $a+b$ 、 ab 皆為有理數，則 a 、 b 也皆為有理數 (D) 若 $a+b$ 、 a^2-b^2 皆為有理數，則 a 、 b 也皆為有理數

三、實數

1. 實數分為有理數與無理數，可以填滿數線。

$$2. \text{數系的關係：實數 } (\mathbf{R}) \left\{ \begin{array}{l} \text{有理數 } (\mathbf{Q}) \left\{ \begin{array}{l} \text{整數 } (\mathbf{Z}) \left\{ \begin{array}{l} \text{正整數 } (\mathbf{N}) \\ 0 \\ \text{負整數} \end{array} \right. \\ \text{分數} \left\{ \begin{array}{l} \text{有限小數} \\ \text{循環小數} \end{array} \right. \\ \text{無理數 (不循環的無限小數)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

四、實數的大小關係

設 a, b, c 是任意實數，則下列各性質成立：

1. 三一律：對於任何兩個實數 a, b ，下列三種大小關係恰有一個成立： $a < b$ ， $a = b$ ， $a > b$ 。
2. 遞移律：若 $a < b$ 且 $b < c$ ，則 $a < c$ 。
3. 不等式的加法性質：若 $a < b$ ，則 $a + c < b + c$ 。
4. 不等式的乘法性質：若 $a < b$ 且 $c > 0$ ，則 $ac < bc$ 。
若 $a < b$ 且 $c < 0$ ，則 $ac > bc$ 。（乘上負數後，不等號方向改變）
5. 若 $a^2 > b^2$ 且 a, b 是正實數，則 $a > b$ 。

範例 5 實數的性質

已知 a, b 皆為實數，若 $\sqrt{2a+b-2} + (a-3b-15)^2 = 0$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

解題技巧：開根號或平方或絕對值之和若為 0，則相加之值必皆為 0。

練習 5

設 a, b 皆為實數，若 $|2a+3b-8| + \sqrt{a-2b+3} = 0$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

範例 6 無理數比較大小

(1) 若 $a = \sqrt{10} - \sqrt{5}$ ， $b = 3 - \sqrt{6}$ ， $c = \sqrt{13} - \sqrt{2}$ ，則 a, b, c 三數之大小順序為_____。

(2) 若 $p = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ ， $q = \sqrt{11} - 3$ ， $r = \sqrt{3} - 1$ ，則 p, q, r 三數之大小順序為_____。

解題技巧：1. 各數的兩根號內數字和相同，先平方後做比較。

2. 各數的兩根號內數字差相同，先倒數再有理化做比較。

練習 6

試比較下列實數的大小：

(1) $\sqrt{13} + \sqrt{3}$, $\sqrt{10} + \sqrt{6}$, $3 + \sqrt{7}$ 。

(2) $4 - \sqrt{14}$, $3 - \sqrt{7}$, $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ 。

五、常用的乘法公式

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。(平方差)

4. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ 。

5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。

6. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。

7. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ 。(立方和)

8. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ 。(立方差)

範例 7 乘法公式之展開

試展開並化簡下列各式：

(1) $(2x-3y)^3 =$ _____ 。

(2) $(3x+1)(3x-1)(9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1) =$ _____ 。

解題技巧：配合乘法公式展開，要注意係數的計算。

練習 7

試展開並化簡下列各式：

(1) $(x+2y)^3 =$ _____ 。

(2) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2) =$ _____ 。

範例 8 乘法公式之因式分解

試將下列各式因式分解：

(1) $27x^3 + 64 =$ _____ 。

(2) $16x^4 - 1 =$ _____ 。

(3) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 =$ _____ 。

解題技巧：配合乘法公式分解，要注意係數的影響。

練習 8

試將下列各式因式分解：

(1) $x^3 - 8y^3 =$ _____。

(2) $x^4 - y^4 =$ _____。

(3) $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 =$ _____。

範例 9 求值問題（一）

已知 a, b 皆為實數且 $a > b$ ，若 $a + b = 6$ 且 $ab = -16$ ，試求：

(1) $a^2 + b^2 =$ _____。

(2) $a - b =$ _____。

(3) $a^3 - b^3 =$ _____。

解題技巧：三要素為 $a \pm b$ （一次方加減）、 ab （相乘）及 $a^2 + b^2$ （平方和），找出這三要素即可求出其他乘法公式之值。

練習 9

已知 a, b 為實數，且 $a + b = 3$ ， $ab = 1$ ，試求下列各式的值：

(1) $a^2 + b^2 =$ _____。 (2) $a^2 - b^2 =$ _____。 (3) $a^3 + b^3 =$ _____。

範例 10 求值問題（二）

已知 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$ ，試求下列各式之值：

(1) $x + \frac{1}{x} =$ _____。 (2) $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ _____。

解題技巧：與倒數有關，有隱藏的相乘之值 $x \times \frac{1}{x} = 1$ 。

練習 10

已知 $x + \frac{1}{x} = 5$ ，試求下列各式之值：

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $x^3 + \frac{1}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

六、根式的基本性質

1. 當 $a, b \geq 0$ 時，

(1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ 。 (2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (此時 $b \neq 0$)。

2. 設 a 為任意實數，則 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ 。

七、雙重根式

■ 設 $a, b \geq 0$ 且 $a \geq b$ ，則：

(1) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 。 (2) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ 。

八、算幾不等式

設 $a, b \geq 0$ ，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，等號只在 $a=b$ 時成立。

範例 11 雙重根式的化簡

試化簡下列雙重根式：

(1) $\sqrt{16 - \sqrt{60}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $\sqrt{\frac{9}{2} + 3\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：要讓內層的根號前面係數是 2，然後將內層根號的數分解為兩數相乘，其和需剛好為前面的整數。

練習 11

試將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $\sqrt{11 + \sqrt{72}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
(3) $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 12 根式的化簡與估計

若 $\sqrt{12}-\sqrt{108}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，試求 $a=$ _____， $b=$ _____。

解題技巧：先找出整數部分，小數值則為原數之值減去整數部分。

練習 12

(1) 設 $\sqrt{21+8\sqrt{5}}=a+b$ ，其中 a 為正整數， $0<b<1$ ，試求 $a=$ _____， $b=$ _____。

(2) 設 x, y 均為有理數，若 $x+\sqrt{16-2\sqrt{48}}=3+y\sqrt{4+\sqrt{12}}$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

範例 13 算幾不等式

設 x, y 皆為正實數且 $4x+9y=24$ ，則：

(1) xy 的最大值為_____。(2) 承(1)，此時的數對 $(x, y) =$ _____。

解題技巧：若給相乘求相加極值或是給相加求相乘極值，即「和 $\xleftrightarrow{\text{求}}$ 求積」，則使用算幾不等式。

練習 13

(1) 設 $x>0, y>0$ ，且 $xy=10$ ，則 $5x+2y$ 之最小值為_____，此時數對 $(x, y) =$ _____。

(2) 設 $x>0, y>0$ ，且 $2x+3y=12$ ，則 xy 之最大值為_____，此時數對 $(x, y) =$ _____。

範例 14 算幾不等式

(1) 若 a 為正數，試求 $a+\frac{1}{a}$ 的最小值為_____。

(2) 若 x, y 為正數且 $4x^2+y^2=10$ ，試求 xy 的最大值為_____。

解題技巧：(1) 利用算幾不等式，將互為倒數的兩正數相乘消去，直接求得最小值。

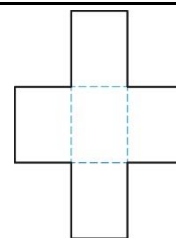
(2) 將平方和當作兩正數套入算幾不等式，開根號化簡即可求出最大值。

練習 14

設 a, b 為實數，若 $a^2 + 2b^2 = 4$ ，則 ab 的最大值為_____。

範例 15 算幾不等式之應用

小林想用鐵絲圍出一個十字形狀的區域，如右圖所示，此區域可分割成 5 個相同的小長方形，若已知此區域的面積為 125 平方公分，則最少需要_____公分的鐵絲才能圍出此區域。（圖上實線部分為鐵絲）



解題技巧：配合題意假設未知數，找出已知條件及所需之值。

練習 15

一農夫想用 66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留寬 2 公尺的出入口，如右圖所示，此農夫所能圍成的最大面積為_____平方公尺。

**範例 16 算幾不等式之變形**

(1) 設 a, b 均為正實數且 $a + b = 6$ ，試求 a^2b 的最大值，並求此時的 a, b 值。

(2) 設 $x > -1$ ，試求 $x + 3 + \frac{4}{x+1}$ 的最小值。

練習 16

設 a, b, c 均為正實數且 $3a+2b+c=6$ ，試求：

(1) abc 的最大值。

(2) a^3b^2c 的最大值，並求此時的 a, b, c 值。

★ 綜合練習

1. 已知整數 a 為 7 的倍數且 $\frac{a}{12}$ 的整數部分為 2，則整數 $a =$ 【 】。

2. 已知 $a = \frac{1}{3}$ ， $b = \frac{4}{13}$ ， $c = 0.\overline{32}$ ， $d = 0.3$ ，則 a, b, c, d 四數之大小順序為 【 】。

3. 已知 a, b 皆為有理數，若 $(a+3) + (b-5)\sqrt{2} = -2 + 3\sqrt{2}$ ，則數對 $(a, b) =$ 【 】。

4. 設 k 為正整數且 $k < 7\sqrt{11} < k+1$ ，則 $k =$ 【 】。

5. 已知 a, b, c 皆為實數且 $a > b$ ，則下列選項何者正確？ 【 】（多選）

(A) $a+c > b+c$ (B) $a-c > b-c$ (C) $ac > bc$ (D) $a^2 > b^2$ (E) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

6. 已知 a, b 皆為實數，若 $(3a-15)^2 + (2b+4)^2 = 0$ ，則 $a+b-5 =$ 【 】。

7. (1) 若 $a = \sqrt{7} + \sqrt{4}$ ， $b = \sqrt{8} + \sqrt{3}$ ， $c = \sqrt{10} + 1$ ，則 a, b, c 三數之大小順序為 【 】。

(2) 若 $p = \sqrt{15} - \sqrt{7}$ ， $q = \sqrt{19} - \sqrt{3}$ ， $r = \sqrt{20} - \sqrt{2}$ ，則 p, q, r 三數之大小順序為 【 】。

8. 將下列各式因式分解：

(1) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 =$ 【 】。

(2) $8x^3 - 64 =$ 【 】。

9. 化簡 $\frac{x^2+2x+4}{x+2} - \frac{x^2-2x+4}{x-2} =$ 【 】。

10. 已知 a, b 皆為實數且 $a > b$ ，若 $a + b = 6$ 且 $ab = -16$ ，則 $a^3 - b^3 =$ 【 】。

11. 已知 $x > 0$ 且 $x - \frac{1}{x} = 2$ ，試求下列各式之值：

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ 【 】。 (2) $x + \frac{1}{x} =$ 【 】。

12. 已知有理數 x, y 滿足 $x + y\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = x\sqrt{34 + 3\sqrt{128}} + 15$ ，則 $x^2 + y^2 =$ 【 】。

13. 已知 a, b 皆為有理數，若 $3(2 + \sqrt{2}) + 2\left(\frac{1}{2 + \sqrt{2}}\right) = a + b\sqrt{2}$ ，則數對 $(a, b) =$ 【 】。

14. 已知 $a > 0$ ，若 $a + \frac{4}{a}$ 有最小值 m 且此時 $a = n$ ，則數對 $(m, n) =$ 【 】。

15. 設 x, y 皆為正實數且 $4x + 9y = 24$ ，則：

(1) $\frac{xy}{2}$ 的最大值為 【 】。 (2) 承(1)，此時的數對 $(x, y) =$ 【 】。

16. 設 x, y 皆為正實數且 $xy = \frac{200}{3}$ ，則：

(1) $3x + 2y$ 的最小值為 【 】。 (2) 承(1)，此時的數對 $(x, y) =$ 【 】。

17. 在 $\sqrt{101}, \sqrt{102}, \sqrt{103}, \dots, \sqrt{200}$ 中有 【 】 個無理數。

18. 將 $\frac{7}{13}$ 化為小數後，小數點後第 90 位數字為 【 】。

19. 實數 $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，試求 b 的值為 【 】。

20. 如圖，一動物園欲將園區重新規劃成六個長方形的區域，設計師以美化的石牆（實線部分）分隔任意兩相鄰的長方形，並以鐵欄杆（虛線部分）隔離遊客。如果石牆的總長度為 1200 公尺（不考慮高度與厚度），而鐵欄杆的數量十分充足，試求鐵欄杆圍成的長方形最大面積為 【 】。

