

1-2 絕對值

一、在數線上標出範圍

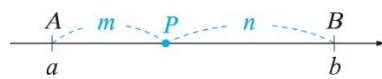
- 1. 數線上的點與實數一一對應，數線上可以標出實數或滿足各種條件的實數範圍。
- 2. 區間：數線上某個範圍稱為區間，通常用小括弧（不含端點）或中括弧（含端點）表示。

二、實數的絕對值

- 1. (1) $|a|$ 表數線上「 a 與原點的距離」。
- (2) $|a-b|$ 代表數線上「 a 與 b 的距離」。
- 2. 設 a 是實數，則 $|a| = \begin{cases} a, & \text{當 } a \geq 0 \\ -a, & \text{當 } a < 0 \end{cases}$ 。

三、分點公式

設 $A(a), B(b)$ 為數線上兩相異點，若 P 點介於 A, B 兩點之間且 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ ，則 P 點的坐標為 $\frac{na+mb}{m+n}$ 。



四、含絕對值符號的一次方程式與不等式

- 1. 絕對值方程式的解：只有一個絕對值符號時，直接去絕對值符號，另一端取正負號即可。
即 $|x| = a, a > 0$ ，則 $x = \pm a$ 。
- 2. 絕對值不等式的解：
設 x, k 是實數，且 $k > 0$ ，則：
 - (1) $|x| \leq k$ 的解為 $-k \leq x \leq k$ ，記為 $[-k, k]$ 。
 - (2) $|x| \geq k$ 的解為 $x \leq -k$ 或 $x \geq k$ ，記為 $(-\infty, -k] \cup [k, \infty)$ 。

式子	圖形	區間
$x > a$		(a, ∞)
$x \leq a$		$(-\infty, a]$
$x < a$ 或 $x > b$		$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$
$x \leq a$ 或 $x \geq b$		$(-\infty, a] \cup [b, \infty)$
$a < x < b$		(a, b)
$a \leq x \leq b$		$[a, b]$
$a < x \leq b$		$(a, b]$
$a \leq x < b$		$[a, b)$

範例 1 絕對值一次方程式

試解出下列方程式：

(1) $|x| = 5$ ， $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $|2x - 1| = 7$ ， $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：等式只有一邊有絕對值時，可直接去絕對值然後另一邊加正負號。

練習 1

試解出下列方程式：

(1) $|x - 2| = 6$ 。

(2) $|3x + 5| = 8$ 。

範例 2 絕對值方程式：解未知數

已知 a 、 b 為實數且 $b < 0$ ，若方程式 $|ax + b| = 6$ 的解為 $x = -4$ 或 $x = 2$ ，則數對 (a, b) = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：用兩根中點與距離寫出基本絕對值式，再依條件同乘倍數還原。

練習 2

已知 a 、 b 為實數，若方程式 $|ax + 6| = b$ 的解為 $x = 7$ 或 -1 ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 3 分點公式

已知數線上兩點 $A(-3)$ 、 $B(13)$ ，若有另一點 P 使得 $\overline{3PB} = \overline{5PA}$ ，則 P 點坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：將線段比例找出之後，利用分點公式運算，要注意是否有兩個答案。

練習 3

數線上 A 、 B 兩點的坐標分別為 -5 、 9 ，若 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$ ，則數線上 P 點的坐標為_____。

範例 4 利用分點公式比較數的大小

設 a 、 b 為實數，且 $a < b$ ，設三個數為 $P = \frac{a+2b}{3}$ 、 $Q = \frac{a+3b}{4}$ 、 $R = \frac{a+4b}{5}$ ，試問這三個數 P 、 Q 、 R 的大小關係為_____。

練習 4

設 a 、 b 為實數，且 $a < b$ ，設五個數為 $P = \frac{2a+3b}{5}$ 、 $Q = \frac{a+b}{2}$ 、 $R = \frac{5a+b}{6}$ 、 $S = \frac{4a+b}{5}$ 、 $T = \frac{5a+2b}{7}$ ，試將這五個數從大排到小為_____。

範例 5 絕對值一次方程式

設 $|x-1| + |x-2| = 4$ ，則 $x =$ _____。

練習 5

設 $|2x-1| = |x+3|$ ，則 $x =$ _____。

範例 6 絕對值一次方程式應用

若 x 為實數且滿足 $|x+3| = 2x-1$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：未知數並非只有在絕對值內，用分段討論方式較適合。

練習 6

若 x 為實數且滿足 $2x + |x-5| = 6$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 7 絕對值一次不等式

試解出下列不等式：

(1) $|4x-5| \leq 3$ ， x 之解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $|-x+2| > 4$ ， x 之解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：只有一邊有絕對值，可直接去掉絕對值，再跟另一邊正負值比較，要注意不等號方向。

練習 7

試解出下列不等式：

(1) $|4-x| < 2$ 。 (2) $|3x+2| \geq 5$ 。

範例 8 絕對值一次不等式應用(一)

若 x 為實數且滿足 $|2x+3| < |x-5|$ ，則 x 之解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：不等式兩邊各一個絕對值時，可直接兩邊平方後再解。

練習 8

- (1) 不等式 $|x-5| > |2x-4|$ 之解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
(2) 試問有多少個整數 x 滿足不等式 $|x-10| < |x-60| < |x+10|$ ？(單選)
(A) 8 個 (B) 9 個 (C) 10 個 (D) 11 個 (E) 20 個。【110.試辦 A】

範例 9 絕對值一次不等式應用(二)

滿足不等式 $1 < |2x-3| < 7$ 的整數 x 有_____個。

解題技巧：去絕對值拆成正、負兩組不等式，各自求出 x 範圍後，再找出其中的整數解。

練習 9

解不等式 $3 < |x-5| \leq 7$ 。

範例 10 絕對值不等式：解未知數

已知 a 、 b 為實數，若不等式 $|ax+2| < b$ 之解為 $-5 < x < 9$ ，試求數對 $(a, b) =$ _____。

解題技巧：由解的中點與距離列出絕對值不等式，再調整係數比對求出未知數。

練習 10

若 $|-2x+a| \leq b$ 的解為 $-3 \leq x \leq 7$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

範例 11 解絕對值不等式：分段討論

解不等式 $|x+4| + |x-3| > 9$ 。

解題技巧：以絕對值內部的零點分段討論，去絕對值解出各範圍後再取聯集。

解： $x+4$ 、 $x-3$ 的正負值由 x 和 -4 、 3 的大小關係來決定

練習 11

解不等式 $|x-1| + |x-3| \geq 5$ 。

五、三角不等式 (補充)

設 x, y 為實數，則：

(1) $|x+y| \leq |x|+|y|$ ，等號成立時 $xy \geq 0$ 。

(2) $||x|-|y|| \leq |x+y|$ ，等號成立時 $xy \leq 0$ 。

範例 12

設 x, y 為實數，試求 $|x-1|+|x+2|$ 的最小值，並求此時 x 的範圍。

解題技巧：利用三角不等式。

練習 12

設 x, y 為實數，試求 $|x+5|+|x-3|$ 的最小值，並求此時 x 的範圍。



綜合練習

1. 數線上有 A, B 兩點， A 點的坐標為 2， B 點在 A 點的左側且 $\overline{AB} = 10$ ，若有一點 P 在 A, B 兩點之間且 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，則 P 點的坐標為【 】。

2. 已知 a, b 皆為實數且 $a > b$ ，若 $p = \frac{a+7b}{8}$ ， $q = \frac{3a+b}{4}$ ， $r = \frac{5a+3b}{8}$ ，則 p, q, r 三數之大小順序為【 】。

3. 請解出下列方程式：

(1) $|2x-1| = 7$ ，則 $x =$ 【 】。

(2) $3|x-2| = |x+8|$ ，則 $x =$ 【 】。

- (2) $2 \leq 2|x-3| < 7$ ，則 x 之解為【 】。

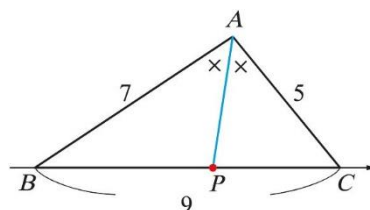
5.若 $|2x+a| \leq b$ 之解為 $-2 \leq x \leq 5$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 若 x 為實數且滿足 $|x+3| - |2x-5| = 4$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7.若 x 為實數且滿足 $2x+3 > |x-5|$ ，則 x 之解為【 】。

8. 如右圖， $\triangle ABC$ 的邊長分別為 $\overline{AB}=7$ 、 $\overline{AC}=5$ 、 $\overline{BC}=9$ 。將 BC 邊貼在數線上，使 B 為原點， $\angle A$ 的角平分線交數線於 P 點，試問 P 點的坐標【 】。

（提示：利用角平分線性質）



9. 破布木 (*Cordia dichotoma* G. Forst.) 是常用的建築用木材, 其密度 x 的值在 $0.65 \sim 0.80 \text{ g/cm}^3$ 。

(1)若將密度 x 值的範圍化為 $|x-a| \leq b$ ，試求 a, b 的值為【 】。

(2)今有一塊破布木，長、寬、高經測量分別為 0.3 公尺、1.2 公尺、1.5 公尺，試估計此塊破布木重量的範圍為【 】。

10. 下列哪些式子有實數解？(多選) 【 】。

(A) $|x-2| + |x+3| = 2$ (B) $|x-2| + |x+3| = 6$ (C) $|x-2| + |x+3| = 8$

(D) $|x-2| - |x+3| = -2$ (E) $|x-2| - |x+3| = -6$

11. 不等式 $|ax+1| > b$ 之解為 $x > \frac{3}{2}$ 或 $x < -\frac{5}{2}$ ，則 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 設 x 是實數，且滿足方程式 $2|x-2| = |x+4|$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 設 a 、 b 、 c 為整數，若 $|a+2| + 2|b+1| + 3|c| = 1$ ，則 $a+b+c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 設 x 為實數，且滿足不等式 $|2x-3| \leq |2x+1|$ ，則 x 的範圍為【 】。