

1-4 常用對數

一、科學記號與有效數字

1. 任意正實數 a 表示成 $a=b\times 10^n$ ，其中 $1\leq b<10$ ， n 是整數，稱為 a 的科學記號表示法，其中 b 稱為係數， n 稱為指數。
2. 在科學測量中，常將測量值以科學記號 $b\times 10^n$ 表示，其中係數 b 的位數稱為有效數字的位數。
例：1.52 $\times 10^7$ 中，係數 1.52 有三位有效數字。

範例 1 科學記號的四則運算

計算下列各式之值，並將答案以科學記號表示且係數部分取三位有效數字：

- (1) $3.6\times 10^4 + 1.2\times 10^3 =$ _____。
(2) $4.6\times 10^{-2} - 5.9\times 10^{-3} =$ _____。
(3) $(3.9\times 10^3)\times(5\times 10^{-5}) =$ _____。
(4) $(3.2\times 10^{-4})\div(2.5\times 10^{-6}) =$ _____。

解題技巧：加減要將後面 10 的幾次方變相同，建議變成較大的；乘除時有效數字自己乘除，10 的次方自己乘除。

練習 1

計算下列各式之值，並將答案以科學記號表示且係數部分取三位有效數字：

- (1) $2.80\times 10^{-4} + 1.90\times 10^{-3} =$ _____。
(2) $3.00\times 10^{-2} - 5.80\times 10^{-4} =$ _____。
(3) $(5.70\times 10^{-2})\times(2.40\times 10^4) =$ _____。
(4) $(3.80\times 10^3)\div(2.50\times 10^5) =$ _____。

範例 2 指數與科學記號合併的應用題

將一張紙對摺一次其厚度會變為 2 倍，若現在有一張紙的厚度為 3×10^{-2} 公分，試問：

- (1) 對摺 3 次的厚度是對摺 8 次的厚度的_____倍。
(2) 對摺 10 次的厚度約為_____公分。（以科學記號表示且將係數部分四捨五入至小數點後第一位）

解題技巧：先看懂題意再列式。

練習 2

美國歌手女神卡卡 (Lady Gaga) 所發行的音樂錄影帶在 YouTube 的點閱數已達到 3.20×10^9 次，而她與其他歌手合作的音樂錄影帶點閱數也達到 7.90×10^7 次。試問有關女神卡卡音樂錄影帶的點閱數的總和約為_____次。(以科學記號表示且將係數部分四捨五入至小數點後第二位)

二、常用對數

1. 對於每個正數 a ，都有唯一的實數 x 滿足 $10^x = a$ ，這個實數 x 記為 $\log a$ ，稱為 a 的常用對數，亦即 $10^{\log a} = a$ 。

2. 若 $\log a = b$ ，亦即 $10^b = a$ 。

例如： $\log 1000 = 3$ ，因為 $10^3 = 1000$ 。

範例 3 常用對數

試解出下列各題之 x 值：

(1) $10^x = 17$ ， $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $\log x = -2$ ， $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧： $10^{\log a} = a$ ； $10^b = a \Leftrightarrow b = \log a$ 。

練習 3

試解出下列各題之 x 值：

(1) 設 $10^x = 23$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) 設 $\log x = 3$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 4 常用對數的運算

試求出下列各題之值：

(1) $\log 10000 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $\log 0.0001 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (3) $\log 0.1 + \log 1 + \log 10 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧： $\log 10^a = a$ 。

練習 4

$\log 1000 - \log 0.01 + \log 100 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 5 常用對數增加（減少）1 的意義

已知 $\log a = 1.3$ ， $\log b = -1.7$ ，則 $\frac{b}{a} =$ _____。

解題技巧： $10^{\log a} = a$ 。

練習 5

- (1) 若 $\log a = 2.3$ ， $\log b = 4.3$ ，試問 b 是 a 的 _____ 倍。
(2) 已知 $\log a = 1.7$ ， $\log b = 1.3$ ，試求 ab 的值為 _____。

範例 6 對數式子的化簡

已知 $a = \log 2$ ， $b = \log 5$ ，則 $10^{a+b+1} =$ _____。

練習 6

已知 $a = \log 3$ ， $b = \log 4$ ，則 $10^{a-b+2} =$ _____。

範例 7 估算位數

形如 $2^n - 1$ 的數（ n 為正整數）被稱為梅森數，命名來自西元十七世紀的法國數學家馬蘭·梅森，如果梅森數是質數就稱為梅森質數。古希臘數學家歐幾里德（Euclid）約在西元前三百年證明「質數有無限多個」，但至今數學家仍不知梅森質數是否也有無限多個。1952 年美國利用電子計算機改革了梅森質數的尋找過程，發現了 $2^{521} - 1$ 是梅森質數，請計算出 $2^{521} - 1$ 是 _____ 位數。
（已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ）

練習 7

- (1) 試估算 7^{10} 是 _____ 位數。（已知 $\log 7 \approx 0.8451$ ）。
(2) 試估算 3^{-20} 在小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？（已知 $\log 3 \approx 0.4771$ ）

範例 8 利用常用對數估計大小

(1) 設 x 為 4 位數且 $n \leq \log x < n+1$ (n 為整數)，則 $n =$ _____。

(2) 設 $y = b \times 10^{-3}$ ($1 \leq b < 10$) 且 $n \leq \log y < n+1$ (n 為整數)，則 $n =$ _____。

練習 8

(1) 已知某數 A 為 6 位數且 $n \leq \log A < n+1$ (n 為整數)，則 $n =$ _____。

(2) 已知某數的常用對數值是 15.44，將此數表示為科學記號且將係數部分取三位有效數字後為 2.73×10^n ，則 $n =$ _____。

範例 9 常用對數應用題

定義飲料中糖分的濃度 S 與甜度等級 K 的關係為 $\log S = aK + b$ 。已知珍珠奶茶的糖分濃度 $S_1 = 10^5$ ，甜度等級 $K_1 = 12$ ，巧克力牛奶的糖分濃度 $S_2 = 10^4$ ，甜度等級 $K_2 = 8$ ，試問：

(1) 數對 $(a, b) =$ _____。

(2) 甜度等級 10 的糖分濃度是甜度等級 2 的 _____ 倍。

解題技巧：看懂題意，找到重點算式，代已知條件求值。

練習 9

定義地震釋放的能量 (E) 與它的芮氏地震規模 (M) 的關係為 $\log E = 4.8 + 1.5M$ 。試求地震規模 6.0 的地震所釋放的能量是地震規模 4.4 的地震所釋放能量的 _____ 倍。



綜合練習

- 化簡 $3.3 \times 10^{-8} - 1.2 \times 10^{-9} =$ 【 】。(以科學記號表示且係數部分取二位有效數字)
- 已知 1 天文單位約為 1.5×10^{11} 公尺，甲、乙兩星球相距 6.4 天文單位。今波特坐著超快速時光機以每秒 6×10^8 公尺的速度飛行，則來回甲、乙兩星球一趟需要【 】秒。(以科學記號表示且係數部分取二位有效數字)
- 已知光每秒恰走 299792.458 公里，則光年（光走一年的距離）約為 $299792.458 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365.2425 \approx 9460536207068$ 公里。
 - 試將光年以科學記號表示，單位為公里，且係數部分取四位有效數字。【 】
 - 已知兩恆星距離 150 光年，試將兩恆星的距離轉換為公里，並以科學記號表示且係數部分取四位有效數字。【 】
- 試解出下列各題之值：
 - 已知 $10^a = 5$ ，則 $a =$ 【 】。
 - $10^{\log b} = \frac{1}{2}$ ，則 $b =$ 【 】。
- $\log 10 + \log 0.1 + \log 100 =$ 【 】。
- 已知 $\log a = 1.3$ ， $\log b = 1.7$ ，則 $ab =$ 【 】。
- 設 $a = \log 16$ ， $b = \log 5$ ， $c = \log 2$ ，則 $a + 2b - 2c =$ 【 】。
- 若定義飲料中糖分的濃度 S 與甜度等級 K 的關係為 $\log S = \frac{1}{4}K + p$ ，其中 p 為一實數。已知珍珠奶茶的糖分濃度為 10^5 ，甜度等級為 12，試問：
 - $p =$ 【 】。
 - 甜度等級 8 的糖分濃度是甜度等級 4 的糖分濃度的【 】倍。
- 下列哪些選項正確？(多選) 【 】
 - 若 $10^x = 5$ ，則 $x = \log 5$
 - $10^{\log 3} = 3$
 - 若 $a > 0$ ，則 $\log a$ 必大於 0
 - $1 < \log 28 < 2$
 - $3 < \log 1234 < 4$
- 試求 $\log 10\sqrt{10} \times \log \frac{1}{\sqrt{10}} + \log \sqrt{10} =$ 【 】。

11. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ，試求 6^{50} 是【 】位數。
12. 設 x 為 5 位數且 $n \leq \log x < n+1$ (n 為整數)，則 $n =$ 【 】。
13. 若溶液中的氫離子濃度為 a 莫耳／升，規定它的 pH 值是 $-\log a$ 。已知胃酸的 pH 值為 1.2，食用醋的 pH 值為 2.9，試問胃酸中的氫離子濃度是食用醋中氫離子濃度的【 】倍？
14. 假設聲音的強度為 F ，則科學家定義 r (貝爾) $= \log F$ 作為度量聲音強度的單位，例如：兩個噪音的響度差 1 貝爾，則它們的聲音強度剛好為 1 與 10 的比。若高聲的談話聲是 6.7 貝爾，獅子的咆嘯聲是 8.7 貝爾，則獅子咆嘯聲的強度是高聲談話聲的【 】倍。
15. 設 $\log(\log A) = 2$ ，則 A 為【 】位數。