

2-3 圓方程式

一、圓的方程式

1. 標準式：圓心為 $A(h, k)$ ，半徑為 r 的圓方程式為 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 。
2. 一般式：平面上圓之方程式皆是二元二次方程式，形如 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 。但是，二元二次方程式 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 的圖形 C 未必是一圓，其判定如下：
 - (1) 若 $d^2 + e^2 - 4f > 0$ ，則 C 為一圓。
 - (2) 若 $d^2 + e^2 - 4f = 0$ ，則 C 為一點。
 - (3) 若 $d^2 + e^2 - 4f < 0$ ，則 C 無圖形。

範例 1 求圓的方程式

- (1) 若圓 C_1 的圓心為 $(5, -1)$ 且通過點 $(1, 1)$ ，則圓 C_1 的方程式為_____。
- (2) 若點 $P(5, 8)$ ， $Q(-1, 2)$ 為圓 C_2 中一條直徑的兩端點，則圓 C_2 的方程式為_____。

解題技巧：找出圓心及半徑即可寫出圓的標準式

練習 1

試求滿足下列條件的圓方程式：

- (1) 圓心為 $K(3, 6)$ ，半徑為 4。
- (2) 圓心為 $A(1, 0)$ ，圓上一點 $P(4, -3)$ 。

範例 2 圓的一般式轉換為標準式

若圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 + 6x - 18y - 10 = 0$ ，則圓 C 的圓心為_____，半徑為_____。

解題技巧： x 的部分與 y 的部分分別作配方法。

練習 2

已知一圓的方程式為 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 = 0$ ，試求此圓的圓心為_____與半徑為_____。

範例 3 圓的一般式(一)

已知平面上三點 $A(1, -1)$ 、 $B(0, 2)$ 、 $C(2, -2)$ ，則 $\triangle ABC$ 的外接圓方程式為何？

練習 3

若 $(6, 2)$ 、 $(4, 6)$ 、 $(-3, 5)$ 、 $(k, -3)$ 四點在同一圓上，則 k 之值為_____。

範例 4 圓的一般式(二)

設 k 為實數，已知方程式 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3k = 0$ ，

(1)若方程式的圖形表一圓，則 k 的範圍為_____。

(2)若方程式的圖形表一點，則 k 之值為_____。

練習 4

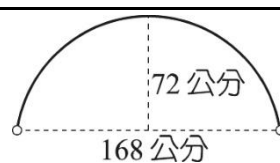
設方程式 $x^2 + y^2 + 2(m+1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 之圖形為一圓，則：

(1) m 之範圍為_____。

(2)當 $m =$ _____時，圓之半徑 r 有最大值為_____。

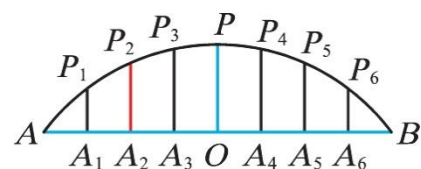
範例 5 應用問題

工匠在窗子外邊想做一個圓弧（劣弧）型的花臺，此花臺在窗口的中央往外伸出 72 公分，窗口的寬度是 168 公分，則此圓弧的圓半徑為_____公分。



練習 5

有一圓拱橋，其中一孔圓拱的寬度 $\overline{AB}=16$ 公尺，如右圖拱高 $\overline{OP}=4$ 公尺，在建造時每隔 2 公尺需用一根支柱支撐，則支柱 $\overline{A_2P_2}$ 之長度為_____公尺。



範例 6 求圓的方程式

若一圓的圓心在 $3x-y=1$ 上，且過點 $A(1, 0)$ 、 $B(3, 2)$ ，則此圓的方程式為_____。

練習 6

已知圓心在 $x+y-1=0$ 上，圓之半徑為 5，且過點 $A(6, 0)$ ，試求此圓方程式為_____。

範例 7 軌跡方程式

設 $A(-1, 2)$ 、 $B(5, -1)$ ，試求：

(1)若 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ ，則點 P 的軌跡方程式為_____。

(2)若 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，則點 P 的軌跡方程式為_____。

練習 7

設 $A(-2, -1)$ 、 $B(3, -1)$ ，試求：

(1)若 $3\overline{PA} = 2\overline{PB}$ ，則點 P 的軌跡方程式為_____。

(2)若 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，則點 P 的軌跡方程式為_____。

二、圓與點的關係

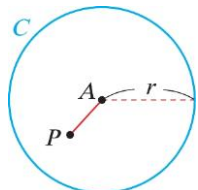
1. 圓與點的位置關係

若有一圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，圓心為 A ，半徑為 r ，與一點 $P(x_0, y_0)$ ，則：

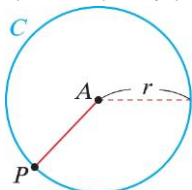
(1) 點 P 在圓內： $\overline{PA} < r$ ，此時可得 $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f < 0$ ，如圖(一)。

(2) 點 P 在圓上： $\overline{PA} = r$ ，此時可得 $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0$ ，如圖(二)。

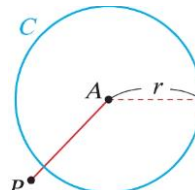
(3) 點 P 在圓外： $\overline{PA} > r$ ，此時可得 $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f > 0$ ，如圖(三)。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

2. 點到圓的距離：

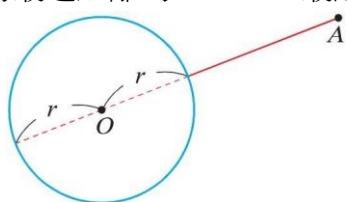
設圓 C 的圓心為 O ，半徑為 r

(1) 若點 A 在圓外

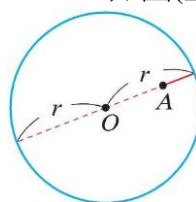
⇒ 圓上各點到 A 的最近距離為 $\overline{OA} - r$ ，最遠距離為 $\overline{OA} + r$ ，如圖(四)。

(2) 若點 A 在圓內

⇒ 圓上各點到 A 的最近距離為 $r - \overline{OA}$ ，最遠距離為 $r + \overline{OA}$ ，如圖(五)。



圖(四)



圖(五)

範例 8 點與圓的關係

已知坐標平面上有一圓 $C: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ 以及一點 $P(-3, 7)$ ，則：

P 點是在圓 C 的_____。(請填入內部、外部或圓周上)

解題技巧：將點代入圓方程式判斷位置關係。

練習 8

設方程式 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ 為一圓，若點 $P(3, 1)$ 在圓外，則實數 k 的範圍為

_____。

範例 9 點到圓的最長與最短距離

(1) 已知點 $A(7, 1)$ ，且 P 為圓 $C: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ 上的一動點，則：

$\overline{PA}$ 的最小值為_____。 $\overline{PA}$ 的最大值為_____。

(2) 坐標平面上的圓 $C: (x-7)^2 + (y-8)^2 = 9$ 上有_____個點與原點的距離正好是整數值。

解題技巧：將點代入圓方程式判斷位置關係，再畫圖做過點與圓心的直線，確認圓上的點與該點最近與最遠的位置。

練習 9

已知點 $A(1, 5)$ ，且 P 為圓 $C: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 36$ 上的一動點，則：

(1) $\overline{PA}$ 的最小值為_____。(2) $\overline{PA}$ 的最大值為_____。

範例 10 弦長及弦中點

若直線 $L: x - y - 2 = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 = 25$ 交於 A, B 兩點，則：

(1) $\overline{AB}$ 的中點坐標為_____。(2) $\overline{AB} =$ _____。

練習 10

圓 $C: x^2 + y^2 = 9$ 內一點 $A(2, 1)$ ，則過 A 點且長度為 5 的弦有幾條？(單選)

(A) 1 條 (B) 2 條 (C) 3 條 (D) 4 條 (E) 無限多條。

★綜合練習

- (1) 已知圓 C_1 的方程式為 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ ，若其圓心 O_1 坐標為 (a, b) ，半徑為 r ，則序組 $(a, b, r) =$ 【 】。
(2) 若點 $P(4, -3)$ ， $Q(-2, 5)$ 為圓 C_2 中一條直徑的兩端點，則圓 C_2 的方程式為【 】。
- 若圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ，其圓心 O 坐標為 $(-3, 5)$ ，半徑為 5 ，則序組 $(a, b, c) =$ 【 】。
- 若 $x^2 + y^2 + 2mx + 4y + 2m^2 + 2m - 4 = 0$ 的圖形為一圓，則：
(1) m 的範圍為【 】。 (2) 此圓的半徑最大為【 】。
- 在坐標平面上， $S: x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ ，下列何者正確？（多選）【 】
(A)若 $k=0$ ，則 S 為一個圓 (B)若 $k=5$ ，則 S 為一點 (C)若 $k=-5$ ，則 S 無圖形
(D)若 S 為一圓，則圓心為 $(-1, 2)$ (E)若圓 S 與 x 軸相切，則 $k=1$ 。
- 已知坐標平面上有一圓 $C: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ 以及一點 $A(3, 4)$ ，試問：
(1) A 點是在圓 C 的【 】。（請填入內部、外部或圓周上）
(2) 若圓 C 上的點離 A 點最近的距離為 m ，最遠的距離為 n ，則 $m-n =$ 【 】。
- 若有一圓的圓心在 $x+2y=3$ 上且過點 $(-2, 0)$ ， $(4, 2)$ ，則此圓方程式為【 】。
- 設 R 為坐標平面上所有滿足 $9 \leq (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 16$ 的點 $P(x, y)$ 所成的區域，則 R 的面積為【 】。
- 獵人養了大小兩隻獵犬，每次狩獵時，都讓兩獵犬守候在相距 1 公里的兩位置上。當獵人射下獵物時，兩獵犬會同時向著獵物直衝過去。若大獵犬的速度是小獵犬的 $\frac{3}{2}$ 倍，試問小獵犬會先追到獵物的範圍區域面積是【 】平方公里。
- 設 $A(0, 0)$ ， $B(15, 0)$ ，則滿足 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 的所有 P 點所形成圖形的方程式為【 】。
- 坐標平面上，已知圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$ ，請選出正確的選項。（多選）【 】
(A)點 $W(0, 0)$ 在圓 C 內 (B)點 $J(2, 1)$ 在圓 C 外 (C)點 $H(3, 2\sqrt{2})$ 在圓 C 上
(D)點 $W(0, 0)$ 與圓 C 上最近的點距離為 1 (E)點 $W(0, 0)$ 與圓 C 上最遠的點坐標為 $(6, \sqrt{5})$