

3-3 多項式不等式

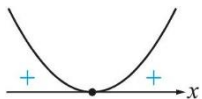
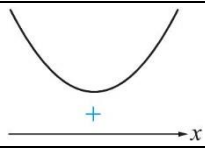
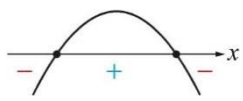
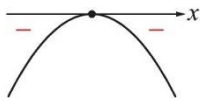
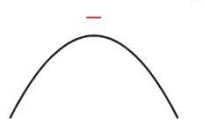
一、一次不等式

直接移項可求得 x 的範圍。

二、二次不等式

■ 將任意實數代入給定的二次式 ax^2+bx+c ，有恆正、恆負，或有正有負（包括 0）三種情形。以不等式 $ax^2+bx+c>0$ 為例，依以下步驟解題。

- (1) 確認首項係數為正，若為負則需先調整為正。（不等號要改變方向）
- (2) 判斷是否可做十字交乘因式分解，若可分解，就先分解好，再找出使此二次式為 0 的數，再判斷解的範圍。
- (3) 若不可十字交乘因式分解，則判斷是否恆正。判別式 $b^2-4ac<0$ 則此式恆正，再依據問題的條件判斷解的範圍（或無解）。
- (4) 若非恆正，則利用公式解找出使此二次式為 0 的數，再判斷解的範圍。

	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$a>0$			
$a<0$			

三、高次不等式

■ 三次以上（含三次）的不等式通稱為高次不等式，解題關鍵在各因式的正負（恆正、恆負，或可正可負）。依以下步驟解題。

- (1) 確認最高次項係數為正，若為負則需先調整為正。（不等號要改變方向）。
- (2) 將此式作因式分解。
- (3) 若有恆正的因式，直接消去。（因為調整過最高次項係數，不會有恆負的情形。）
- (4) 找出「可正可負因式」的關鍵點（使該式等於 0 的數），作正負的判斷。

範例 1 一次不等式

不等式 $\frac{3}{4}x - \frac{2x-1}{6} < \frac{3x+1}{2} - \frac{5}{2}$ 之解為_____。

練習 1

聯立不等式 $\begin{cases} 2x-3 \geq 4x+5 \\ \frac{x-1}{3} + 2x+15 > -x + \frac{1}{2} \end{cases}$ 之解為_____。

範例 2 二次不等式

試解下列各一元二次不等式：

(1) $x^2 + 2x - 35 \leq 0$ 。

(2) $5x - x^2 + 1 \leq 0$ 。

(3) $x^2 + 4x + 4 \geq 0$ 。

(4) $2x^2 - 8x + 11 \leq 0$ 。

練習 2

試解下列各一元二次不等式：

(1) $-2x^2 + 5x - 2 \geq 0$ 。

(2) $6x^2 + 29x - 22 > 0$ 。

(3) $4x^2 - 4\sqrt{7}x + 7 > 0$ 。

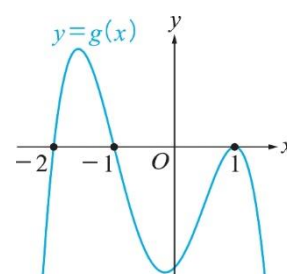
(4) $3x(x-1) + 5 < 2x - 3$ 。

範例 3 函數值的正負號

設 $g(x)$ 為四次多項式，且 $y = g(x)$ 的圖形如右，試求：

(1) $g(x) > 0$ 的解為_____。

(2) $g(x) \leq 0$ 的解為_____。

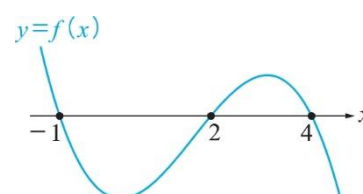


練習 3

設 $f(x)$ 為三次多項式，且 $y = f(x)$ 的圖形如右，試求：

(1) $f(x) \geq 0$ 的解為_____。

(2) $f(x) < 0$ 的解為_____。



範例 4 高次不等式（一）

試解下列不等式：

$$(1)(x+1)(x-3)(x-4) \leq 0。$$

$$(2)(2-x)(3x+1)(x-1)(x+4) > 0。$$

解題技巧：先讓一邊變 0，將算式作完整因式分解，找出等於 0 之值，再分段討論正負。

練習 4

試解下列各不等式：

$$(1)x(x-1)(x-3)(x-5) < 0。$$

$$(2)x^4 - 4x^2 + 3 > 0。$$

範例 5 高次不等式（二）

試解下列各不等式：

$$(1)(x^2 + 2x + 4)(x-1)(x-2) < 0。$$

$$(2)(-2x^2 + 2x - 1)(x+2)x(x-2) < 0。$$

練習 5

試解下列各不等式：

$$(1)(x^2 + 3x + 2)(x^3 - 1) > 0。$$

$$(2)(-x^2 + 7x - 16)(x^2 - 3x + 2) \geq 0。$$

範例 6 高次不等式 (三)

試解下列各不等式：

$$(1)(x-1)^2(x+1)(x-3) \geq 0 \text{ 。}$$

$$(2)(x+1)^{101}(x-2)^{102}(x-5)^{103} < 0 \text{ 。}$$

$$(3)(x+2)^{21}(x-1)^{13}(x-2)^8(x-3)^{31} \geq 0 \text{ 。}$$

練習 6

試解下列各不等式：

$$(1)(x+1)(x-1)^2(x-2)(x-3) \leq 0 \text{ 。}$$

$$(2)(x-1)^3(x-3)^4(x-5)^5 < 0 \text{ 。}$$

$$(3)x^2(x+1)^{12}(x-1)^7(x-2)^6 > 0 \text{ 。}$$

$$(4)(x^2+x+3)(x+1)^4(x-2)^3(x+3)^5(x-4)^7 > 0$$

範例 7 高次不等式（四）

已知多項式 $f(x)=x^3-5x^2+ax+b$ 有一個因式 x^2-4x+2 ，試求 $f(x)\geq 0$ 的解為_____。

練習 7

若 $f(x)=2x^4-x^3+ax^2+bx-5$ 有完全立方因式 $(x-1)^3$ ，試求 $f(x)>0$ 之解為_____。

範例 8 二次函數的恆正或恆負

對於任何實數 x ， $f(x)=(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6$ 恆為正數，則實數 m 之範圍為_____。

練習 8

若二次函數 $y=ax^2+2ax$ 的圖形恆在 $y=2a^2x-4a$ 圖形的下方，則實數 a 之範圍為_____。

5. 若函數 $f(x) = -x^2 + ax + b < 0$ 的解為 $x < -3$ 或 $x > 2$ ，則數對 $(a, b) =$ 【 】。

6. 設 k 為實數，若二次不等式 $kx^2 + 2x + k \geq 0$ 沒有實數解，則 k 之值可能為何？（多選）
(A) -10 (B) -6 (C) -2 (D) 2 (E) 6 。【 】

7. 不等式 $(x-1)(x+2)(x-2)^2(x-3)^3 \geq 0$ 之解為 【 】。

8. 設 $f(x)$ 是一個二次函數，若 $f(x) > 0$ 的解是 $-1 < x < 3$ ，則不等式 $f(3x-5) < 0$ 之解為 【 】。

9. 已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $x+6$ 得商式 $q(x)$ 和餘式 3 。若 $q(x)$ 在 $x=-6$ 有最大值 8 ，則 $y=f(x)$ 圖形的對稱中心坐標為 【 】。 【114.學測 A】

10. 設三次實係數多項式 $f(x)$ 滿足下列條件：

① $f(x)$ 除以 x 的餘式為 -6 。

② $f(x)$ 除以 $x-4$ 的餘式為 -50 。

③ $y=f(x)$ 與 x 軸交於點 $P(-1, 0)$ 、 $Q(2, 0)$ ，如右圖所示。

試選出正確的選項。（多選） 【 】

(A) $f(x)$ 與 y 軸的交點為 $(0, -6)$

(B) $f(x)$ 與 x 軸的另一交點為 $(1, 0)$

(C) 不等式 $f(x) \geq 0$ 的解為 $x \leq -1$ 或 $1 \leq x \leq 2$

(D) 不等式 $f(-x) \geq 0$ 的解為 $x \geq 1$ 或 $-2 \leq x \leq -\frac{3}{2}$

(E) 不等式 $xf(x) < 0$ 的解為 $x \leq -1$ 。

