

1-3 指數

一、整數指數

設 a 為非 0 實數， m 、 n 為正整數，則定義：

1. 正整數指數： $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}$ 。

2. 零指數： $a^0 = 1$ 。負整數指數： $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 。

二、有理數指數

對於正實數 a ，正實數 n ，整數 m 。

1. 存在唯一的正數 b 滿足 $b^n = a^m$ 。這個正數 b 就定義為 a 的 $\frac{m}{n}$ 次方，記為 $a^{\frac{m}{n}}$ ，也就是

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m。$$

2. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ 。 $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ 。

三、實數指數律

設 a, b 是正實數， r, s 為實數，則：

1. $a^r \times a^s = a^{r+s}$ 。 2. $(a^r)^s = a^{r \times s}$ 。 3. $a^r \times b^r = (a \times b)^r$ 。

範例 1 整數指數的運算

試解出下列各題中的值：

$$(1) 16^2 \times 8^{-4} \times 4^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x = \underline{\hspace{2cm}}。 \quad (2) (2 + \sqrt{3})^3 (2 - \sqrt{3})^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^0 + 2^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

解題技巧：將底數變成最小的質因數。

練習 1

試解出下列各題中的值：

$$(1) 27^{-2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \times 81^2 = 3^x, x = \underline{\hspace{2cm}}。 \\ (2) (\sqrt{2} - 1)^{10} (\sqrt{2} + 1)^9 + 2^{-2} + (-3)^{-2} + (2^{99} + 3^{-99})^0 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

範例 2 指數律的運算

(1) 設 a 為正實數，且 $a^3 = 2$ ，若 $a^x = \frac{1}{8}$ ，試求 x 的值。

(2) 設 x 為實數，且 $3^x = 4$ ，試求 $12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + \sqrt{9^x}$ 的值。

解題技巧：利用指數定律將底數化為相同基底，再透過乘方互換代入已知條件求解。

練習 2

- (1) 設 a 為正實數，且 $a^5=4$ ，若 $a^x=\frac{1}{16}$ ，試求 x 的值。
- (2) 設 x 為實數，且 $4^x=5$ ，試求 $50\times\left(\frac{1}{16}\right)^x+64^x$ 的值。

範例 3 有理數指數的運算（一）

試求出下列各題之值：

- (1) $(0.008)^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}\times\sqrt[3]{4^{4.5}}=$ _____。
- (2) $\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt[6]{25}}{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{125}}=\left(\frac{5}{3}\right)^x$ ， $x=$ _____。

解題技巧：整理好底數再利用指數律運算。

練習 3

試求出下列各題之值：

- (1) $\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2}=$ _____。
- (2) $\frac{(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{2})^7}{(\sqrt{125})^{\frac{4}{3}}\times(\sqrt[3]{25})^6}=\left(\frac{2}{5}\right)^x$ ， $x=$ _____。

範例 4 有理數指數的運算（二）

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$ ，若 $\sqrt[4]{a^3}\times\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{\sqrt{a^6}}}\times a^2=(a^x)^5$ ，則 $x=$ _____。

解題技巧：將各個 a 的根號次方都併到指數上。

練習 4

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，且 $\sqrt[6]{a^5} \times \sqrt[12]{a^{14}} = a^x$ ，則 $x =$ _____。

範例 5 實數指數的運算

$$(1) \frac{4^{\sqrt{3}} \times 16^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{8^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}} = \text{_____} \quad (2) \frac{(9^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 5^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}}{(3^{2\sqrt{5}} \times 125^{\frac{5\sqrt{5}}{6}})^{\frac{2}{\sqrt{5}}}} = \text{_____}。$$

解題技巧：將底數化為最小的質因數。

練習 5

試求出下列各題之值：

$$(1) 27^{\sqrt{2}} \times 9^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \text{_____}。$$
$$(2) (2^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \text{_____}。$$

範例 6 指數運算與乘法公式

設 a 為正實數且 $a + a^{-1} = 3$ ，試求下列各式的值：

$$(1) a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \quad (2) a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}。$$

解題技巧：將所求化為底數的根式，再利用完全平方與立方和公式代入條件求解。

練習 6

設 a 為正實數，若 $a^1 - a^{-1} = \sqrt{5}$ ，下列哪些選項是正確的？（多選）

$$(A) a^1 + a^{-1} = 3 \quad (B) a^2 + a^{-2} = 7 \quad (C) a^4 + a^{-4} = 45 \quad (D) a^2 - a^{-2} = 3\sqrt{5} \quad (E) a^3 + a^{-3} = 18$$

範例 7 指數的應用題

藥物的半衰期是指藥物在血液中的濃度經過代謝後降低到原來一半所消耗的時間。已知 A 藥物的半衰期為 3 小時，現在血液中藥物的濃度為 80 %，經過 12 小時後，血液中藥物的濃度為 _____ %。

解題技巧：總時間除以半衰期，算出幾次方，再去乘原來的量！

練習 7

放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？（單選）

(A) 8 小時 (B) 10 小時 (C) 12 小時 (D) 15 小時 (E) 20 小時 [105.學測]

範例 8 利用指數律求值

設 $67^x = 27$ ， $603^y = 81$ ，試求 $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} =$ _____。

練習 8

設 x, y, z 為實數且 $5^x = 7^y = (\sqrt{35})^z$ ，試求 $\frac{z}{x} + \frac{z}{y}$ 的值。

範例 9 求值問題

設 $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ ，則：

$$(1) \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}。 (2) \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

練習 9

設 $a^{2x} = 2$ ，則：

$$(1) \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}。 (2) \frac{a^{3x} + a^{-5x}}{a^x - a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

★ 綜合練習

1. 試求出下列各題之值：

$$(1) (2^3)^3 \times 4^{-3} \times 8^2 = \underline{\hspace{2cm}}。 (2) \frac{15^2 \times 45^2}{3^5 \times 5^3} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

2. 試求出下列各題之值：

$$(1) \sqrt[6]{8^2} \times 125^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}。 (2) \left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-5} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

3. 設 x, y, z 皆為正數，已知 $x^2 = y^3, y^{-2} = z^4$ ，若 $x^{-2} \cdot y^5 \cdot z^2 = x^k$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}。$

4. 設 $a > 0$ ，若 $a + a^{-1} = 5$ ，則 $a^2 + a^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}。$

5. 設 $a > 0, b > 0$ ，若 $a^3 = 16, b^2 = 27$ ，則 $a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{4}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}。$

6.試求出下列各題之值：

(1) $\frac{4^{\sqrt{3}} \times 16^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{8^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。(2) $\frac{(3^{-\sqrt{3}} \times 5^{-2\sqrt{3}})^{-\sqrt{3}}}{(3^{2\sqrt{5}} \times 5^{5\sqrt{5}})^{\frac{1}{\sqrt{5}}}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

7.某實驗室在 2024 年 1 月 1 日時存有 A 放射性物質 200 克，經觀察發現，到 2027 年 1 月 1 日時該放射性物質剩下 100 克，且依此情形逐漸減少，試問：

- (1) 到 2033 年 1 月 1 日再次觀察時，該放射性物質剩下【 】克。
(2) 到【 】年 1 月 1 日觀察時，該放射性物質會剩下 3.125 克。

8.人體中的感冒病毒經過 A 藥物控制後，每經過 1 天，病毒數量會變為前一天的 a 倍。已知小翰開始服用 A 藥物的 3 天後體內病毒數量為 1.2×10^4 個，5 天後體內病毒數量為 3×10^3 個，則 8 天後體內病毒數量會剩下【 】個。

9. 若 $a^{-3} = 4$ ，試問 a 的【 】次方是 0.125。

10. 若 $a = 10^{0.3}$ ， $b = 10^{0.4}$ ， $c = 10^{0.6}$ ，試比較 a ， c 的算術平均數與 b 的大小關係【 】。

11.已知 $1 \text{ GB} = 2^{10} \text{ MB}$ ，今有一臺數位相機裝有 32 GB 容量的記憶卡，試問此記憶卡大約可存放【 】張 5 MB 大小的數位照片？

12.某放射性物質的重量現為 400 克，已知 5 年後剩下 25 克。

- (1) 試問該放射性物質重量衰變為一半所需的時間（即“半衰期”）為【 】年。
(2) 試問從現在起經過【 】年後放射性物質的重量會小於 1 克？（取至整數位）

13.有一個品牌的濾水器每裝一層濾網可去除水中 50% 的雜質，若想要依此得到雜質不大於萬分之一的水，試問至少須裝【 】層濾網。