

CH3 多項式函數

3-1 多項式的運算與應用

一、多項式的定義

1. 多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，則：

(1) a_k ： x^k 項的係數。

(2) 若 $a_n \neq 0$ ，稱 $f(x)$ 為 n 次多項式，以符號 $\deg f(x) = n$ 表示； a_n 稱為首項係數或領導係數。

(3) $f(x) = a_0$ 稱為常數多項式。

① 當 $a_0 \neq 0$ 時， $f(x) = a_0$ 稱為零次多項式。例： $f(x) = 3$ 。

② 0 為零多項式，我們不規定零多項式的次數。例： $f(x) = 0$ 。

2. 多項式的辨別：

多項式中的“ x ”一概不在分母中，也不在根號內或絕對值符號內，且它是一個有限項的和。

例： $\frac{2x+1}{x^2-1}$ ， $\frac{x^4+x+1}{x+1}$ ， $\sqrt{x-1}$ ， $\sqrt{x^2+x+1}$ ， $|x|$ ， $\frac{x^2-1}{x+1}$ 等不是 x 的多項式。

3. 兩多項式相等：

兩個多項式相對應的各次方項（對應項）係數都相等時，稱這兩個多項式相等。

4. 多項式的係數：（補充）

設多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，則：

(1) 常數項係數 $a_0 = f(0)$ 。

(2) 各項係數和 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = f(1)$ 。

(3) 偶次項係數和 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$ 。

(4) 奇次項係數和 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$ 。

二、多項式的四則運算

1. 多項式的加減法：

兩個多項式相加或相減，是把次數相同的單項係數相加或相減。

2. 多項式的乘法：

兩個多項式相乘，可利用乘法對加法的分配律來計算，並將次數相同的單項合併整理，依降冪（或升冪）排列。

若 $\deg(f(x)) = n$ ， $\deg(g(x)) = m$ ，則 $\deg(f(x)g(x)) = n + m$ 。

3. 多項式的除法（長除法）：

多項式除法的過程類似長除法，最高次項要被除盡，餘式的次數要比除式的低。

三、多項式的除法原理

將多項式 $f(x)$ 除以多項式 $g(x)$ ，其中 $g(x) \neq 0$ ，可以得到唯一的商式 $q(x)$ 與餘式 $r(x)$ ，它們的關係可以表示為 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ，其中 $r(x)$ 次數低於 $g(x)$ 次數或 $r(x) = 0$ 。

範例 1 多項式的次數

已知 $f(x) = (a+1)x^3 + (2a-b)x^2 + bx - 3$ ，且 $\deg f(x) = 1$ ，試求：

(1) 數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 首項係數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 常數項為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：注意多項式的次數，若超過次數的項，其係數必為 0。而首項係數指的是多項式最高次方項的係數，常數項為沒有 x 的項（即 x^0 項的係數）。

練習 1

已知 $f(x) = (a+3)x^3 + (b-1)x^2 + cx - 2$ 為零次多項式，則序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 2 多項式的係數

設 $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + 1)^4$ ，將 $f(x)$ 展開之後，則

(1) 常數項為 。

(2) 各項係數和為 。

(3) 偶次項係數和為 。

(4) 奇次項係數和為 。

練習 2

設 $f(x) = (2x^2 + x - 4)^5$ ，將 $f(x)$ 展開之後，則

(1) 常數項為 。

(2) 各項係數和為 。

(3) 偶次項係數和為 。

(4) 奇次項係數和為 。

範例 3 多項式的相等

若多項式 $f(x) = (a+2b-2)x^3 - 8x^2 + cx + (3a+b)$ 與 $g(x) = (2a-b-2)x^2 + (a-b)x + d$

相等，則 $a+b+c+d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：兩式個別化簡後，對照係數。

練習 3

設 a, b, c 為實數，且兩多項式 $f(x) = ax^2 + (2a+b)x + (2b+c)$ 與 $g(x) = 3x^2 - x + 1$ 相等，試求 a, b, c 的值為何？

範例 4 多項式的四則運算

已知 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ ， $g(x) = x^2 + 3$ ，則：

(1) $f(x) \times g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $f(x) \div g(x)$ 的商式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：小心計算，注意符號，有缺項要補 0。

練習 4

(1) 試求 $(3x^2 + x - 2)(4x + 5)$ 的乘積得 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 利用長除法求 $x^4 + 15x - 12$ 除以 $x^2 + 2x - 3$ 的商式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 5 綜合除法

(1) 利用綜合除法，求 $5x^3 - 8x^2 - 1$ 除以 $x - 3$ 的商式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 設 $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 21x + 8 = a(x - 3)^3 + b(x - 3)^2 + c(x - 3) + d$ ，則序組 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解題技巧：除式 $x - a$ 時綜合除法中的乘數為 a ，有遇缺項要補 0。

練習 5

- (1) 利用綜合除法，求 $x^3+2x-10$ 除以 $x+2$ 的商式為_____，餘式為_____。
- (2) 設 $f(x)=x^3+2x^2-3x-1=a(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)+d$ ，則序組 (a, b, c, d) =_____。
- (3) 設 $f(x)=x^3+2x^2-3x-1$ ，試求 $f(-2+\sqrt{3})$ =_____。

範例 6 多項式的除法原理

設多項式 $f(x)$ 除以多項式 $g(x)$ 的商為 $q(x)$ ，餘式為 $r(x)$ ，試求：

- (1) $f(x)$ 除以 $-\frac{1}{4}g(x)$ 的商式為_____，餘式為_____。
- (2) $3f(x)$ 除以 $2g(x)$ 的商式為_____，餘式為_____。

解題技巧：以除法原理形式呈現，再配合題目調整改變的部分，其他地方也需跟著改變。

練習 6

設 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式為 $q(x)$ ，餘式為 $r(x)$ ，試求：

- (1) $f(x)$ 除以 $6g(x)$ 的商式為_____，餘式為_____。
- (2) $3f(x)$ 除以 $4g(x)$ 的商式為_____，餘式為_____。

四、餘式定理

多項式 $f(x)$ 被一次多項式 $ax-b$ 所除的餘式為 $f\left(\frac{b}{a}\right)$ 。

五、因式定理

設 $f(x)$ 為多項式

(1) 若 $f(x)$ 有一次因式 $ax-b$ ，則 $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$ 。

(2) 若 $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$ ，則 $f(x)$ 有一次因式 $ax-b$ 。

範例 7 餘式定理（一）

多項式 $f(x) = 3x^{10} - 20x^6 + 5x^2 + 209$ 除以 $x-2$ 的餘式為_____。

解題技巧：除式數字小，直接代入求值即可。

練習 7

已知多項式 $f(x) = 108x^8 - 8x^4 + 20x^2 + 5$ ，試求 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為_____。

範例 8 餘式定理（二）

試計算 $9^5 - 10 \times 9^4 + 11 \times 9^3 - 20 \times 9^2 + 28 \times 9 - 100 =$ _____。

解題技巧：代入的數字較大，不適合直接計算，改用綜合除法求餘式。

練習 8

試計算 $15 \times 7^5 - 104 \times 7^4 - 6 \times 7^3 - 5 \times 7^2 - 8 \times 7 + 13$ 的值為_____。

範例 9 除式為 $(x-a)(x-b)$ 求餘式

設 $f(x)$ 為一多項式，以 $x+2$ 除 $f(x)$ 餘 5，以 $x-3$ 除 $f(x)$ 餘 15，則以 $(x+2)(x-3)$ 除 $f(x)$ 之餘式為_____。

解題技巧：以 $(x+2)$ 除 $f(x)$ 餘式為 5，表示 $f(-2)=5$

練習 9

(1) 設多項式 $f(x)$ 除以 x^2-5x+4 ，餘式為 $x+2$ ，除以 x^2-5x+6 ，餘式為 $3x+4$ ，則多項式 $f(x)$ 除以 x^2-4x+3 ，餘式為_____。

(2) 設 $\deg(f(x)) \geq 3$ ，以 $x-1$ 除之餘 3，以 $x+1$ 除之餘 1，以 $x-2$ 除之餘 -2，則以 $(x-1)(x+1)(x-2)$ 除 $f(x)$ 餘式為_____。

範例 10 求餘式

設 $f(x)$ 為一多項式，已知 $(x-1)f(x)$ 除以 x^2-2x+2 的餘式為 $3x+4$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2-2x+2 的餘式為_____。

解題技巧：先用除法原理假設 $f(x)=(x^2-2x+2)q(x)+(ax+b)$ ，再放大被除式。

練習 10

設 $f(x)$ 為一多項式，已知 $xf(x)$ 除以 x^2+kx+1 ，所得的餘式為 $-2x-1$ ，而 $f(x)$ 除以 x^2+kx+1 所得的餘式為 $x+1$ ，則 $k=_____$ 。

範例 11 求多項式 $f(x)$

設 $f(x)$ 為四次多項式，以 $(x-1)^3$ 除之得餘式為 3，以 $x-2$ 除之得餘式為 6，以 $x+2$ 除之得餘式為 138，則 $f(x)=$ _____。

解題技巧：被除式為 4 次，除式為 3 次，則可設商式為 1 次，即 $f(x)=(x-1)^3(ax+b)+3$ 。

練習 11

設 $f(x)$ 為三次多項式，若以 x^2+x+2 除之得餘式為 $2x+3$ ，若以 x^2+x-2 除之得餘式為 $6x+7$ ，則多項式 $f(x)=$ _____。

範例 12 因式定理

若 $x+1$ 與 $2x-1$ 皆為 $6x^3+ax^2+bx-2$ 之因式，則數對 $(a, b) =$ _____。

解題技巧：令因式等於 0，所得 x 值代入多項式等於 0，再解聯立方程式。

練習 12

若 x^4-3ax^2+bx+4 有因式 $x+1$ 及 $x-2$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

範例 13 餘式定理與因式定理綜合應用

若三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = f(-1) = 0$, $f(3) = 24$, 則 $f(4) =$ _____。

解題技巧：由函數值為 0 可找出因式，利用因式假設多項式後，再代其他函數值求出完整式子。

練習 13

- (1) 若三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1) = f(2) = f(3) = 0$, $f(4) = 18$, 則 $f(5) =$ _____。
- (2) 設 $f(x)$ 為三次多項式，已知 $f(1) = f(2) = 5$, $f(0) = 7$, $f(-1) = -1$, 則多項式 $f(x)$ 為_____。



綜合練習

1. 已知 $f(x)$, $g(x)$ 為兩多項式， $\deg(f(x)) = \deg(g(x)) = 4$ 且兩者的首項係數分別為 3 與 -3 ，若 $\deg(f(x) - g(x)) = a$, $\deg(f(x) \cdot g(x)) = b$, 則數對 $(a, b) =$ 【_____】。
2. 若多項式 $f(x) = (a+2)x^3 + (a-6)x^2 - 4x + 2a$ 是 x 的二次多項式且與多項式 $g(x) = bx^2 - cx - d$ 相等，則 $a+b+c+d =$ 【_____】。
3. 已知 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 1$, $g(x) = x^2 - 2x + 3$, 則：
- (1) $f(x) \cdot g(x) =$ 【_____】。
- (2) $f(x) \div g(x)$ 的餘式為【_____】。
4. 已知多項式 $f(x) = (x+2)(2x^2 + 4x - 6) + 8$, 試問：
- (1) $f(x)$ 除以 $2x+4$ 的商式為【_____】，餘式為【_____】。
- (2) $3f(x)$ 除以 $2x+4$ 的商式為【_____】，餘式為【_____】。
5. 設 $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 21x + 8 = a(x-3)^3 + b(x-3)^2 + c(x-3) + d$, 試求：
- (1) 序組 $(a, b, c, d) =$ 【_____】。
- (2) $f(3+\sqrt{3}) =$ 【_____】。

6. 多項式 $f(x) = 2024x^{2024} - 1024x^{1024} - 500x^{500} + 300$ 除以 $x-1$ 的餘式為【 】。
7. $9^5 - 10 \times 9^4 + 11 \times 9^3 - 20 \times 9^2 + 28 \times 9 - 100 =$ 【 】。
8. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 5，除以 $2x+2$ 的餘式為 3，則 $f(x)$ 除以 $(x+2)(x+1)$ 的餘式為【 】。
9. 設多項式 $f(x)$ 除以 x^2-x-6 的餘式為 $2x+3$ ，除以 $x^2+4x-12$ 的餘式為 $3x-11$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2-4 的餘式為【 】。
10. 若 $x+1$ ， $ax-1$ ， $3x+b$ (a, b 皆為正整數) 皆為多項式 $f(x) = 6x^3 + cx^2 - x - 2$ 的不同因式，則序組 $(a, b, c) =$ 【 】。
11. 若三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(2) = f(-3) = f(-1) = 0$ ， $f(3) = -24$ ，則 $f(1) =$ 【 】。
12. 若三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1) = f(2) = 2$ ， $f(-1) = -22$ ， $f(-2) = -82$ ，則 $f(3) =$ 【 】。
13. 設 a, b 是常數，多項式 $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ ，剛好可以被 $x^2 + x - 4$ 整除，則數對 $(a, b) =$ 【 】。