

科學記號與常用對數

➤ 科學記號

1. 在各科領域中，常會遇到很大或很小的正數，可表示成 $a \times 10^n$ 的型態，其中 $1 \leq a < 10$ 且 $n \in N$ ，稱為科學記號表法。 a 的各位數字即為有效數字，如 2.18×10^{16} 為三為有效數字。
2. 由科學記號判斷位數：觀察 $2 \times 10^4 = 20000$ 為五位數， $3 \times 10^{-6} = 0.000003$ 在小數點後第6為開始不為0，知：
 - (1) $1 \leq a < 10$ 且 $n \in N$ ，則 $a \times 10^n$ 的整數部分有 $n + 1$ 位。
 - (2) $1 \leq a < 10$ 且 $n \in N$ ，則 $a \times 10^{-n}$ 在小數點後第 n 位開始出現不為0的數字。

➤ 常用對數

1. 用計算機知10取0.3010次方的值會接近2，再進一步發明符號，把這個次方的精確值記為 $\log 2$ ，稱為「對數」，其中2為「真數」。

$$(1) 10^k = a \Leftrightarrow k = \log a, \text{ 如 } 10^3 = 1000 \Leftrightarrow 3 = \log 1000.$$

$$(2) 10^{\log a} = a, \log(10^a) = a, \text{ 如 } 10^{\log 2} = 2, \log(10^4) = 4.$$

注意! 真數 a 必須為正數才可以取對數，如 $\log 0$ 、 $\log(-10)$ 均為無意義的符號。而

$$\log 1 = 0, \log 10 = 1, \log \frac{1}{10} = -1, \log 100 = 2,$$

2. 對數的大小關係：以10為底的指數，次數越大則值越大，所以：

$$(1) x > y > 0 \Leftrightarrow \log x > \log y, \text{ 即真數值越大則對數值越大。}$$

$$(2) \text{ 若 } \log x = \log y, \text{ 則 } x = y.$$

3. 利用對數來估計指數：已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ，即 $10^{0.3010} \approx 2$ ，若想估計 2^{100} 的大小，可由指數律得 $2^{100} \approx (10^{0.3010})^{100} = 10^{30.10} = 10^{0.10} \times 10^{30} \approx 1.26 \times 10^{30}$ ，所以 2^{100} 乘開共31位，最高位數字為1。

注意! 為了方便我們習慣把 $\log 2 \approx 0.3010$ 記為 $\log 2 = 0.3010$ ，其實我們所處理的對數值大多為無理數，所寫的等號大多都是近似值。

雖然題目都會附對數值，但為了加快解題速度，請同學熟記：

$$\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 7 \approx 0.8451; \text{ 可以用指數律推知: } \log 4 \approx 0.6020, \log 5 \approx 0.6990, \log 6 \approx 0.7781, \log 8 \approx 0.9030, \log 9 \approx 0.9542$$

4. 對數律(補充)

$$(1) \log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$$

$$(2) \log_a AB = \log A + \log B$$

$$(3) \log_a \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$(4) \log_a A^r = r \log A$$

➤ 科學記號練習題

1. 以科學記號表示下列各數：

(1) $123400000 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。 (2) $0.0003045 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。【新課綱自命題】

2. 計算下列各式之值，並將答案以科學記號表示且係數部分取三位有效數字：

(1) $2.80 \times 10^{-4} + 1.90 \times 10^{-3} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

(2) $3.00 \times 10^{-2} - 5.80 \times 10^{-4} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

(3) $(5.70 \times 10^{-2}) \times (2.40 \times 10^4) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

(4) $(3.80 \times 10^3) \div (2.50 \times 10^5) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

3. 已知 1 天文單位約為 1.5×10^{11} 公尺，甲、乙兩星球相距 6.4 天文單位。今波特坐著超快速時光機以每秒 6×10^8 公尺的速度飛行，則來回甲、乙兩星球一趟需要【 $\quad \quad \quad$ 】秒。（以科學記號表示）

4. 莫耳是科學上用來表示物質所含粒子的單位，已知 1 莫耳 = 6×10^{23} 個粒子，若桌上的一杯純水含有水分子 2.4×10^{24} 個，則此杯純水含氫原子【 $\quad \quad \quad$ 】莫耳。【素養題】

註：1 個水分子 (H_2O) 含有 2 個氫原子。

5. 已知光速約為每秒 3×10^8 公尺，如果臺灣從北到南以 400 公里計算，那麼光一秒可以南北跑【 $\quad \quad \quad$ 】趟（來回一次為一趟）。【生活應用題】【新課綱自命題】

6. 已知 Byte 是電腦的記憶單位，簡記為 B (Byte 的簡寫)。已知 $1 \text{ KB} = 2^{10} \text{ B}$ ， $1 \text{ MB} = 2^{10} \text{ KB}$ ， $1 \text{ GB} = 2^{10} \text{ MB}$ ， $1 \text{ TB} = 2^{10} \text{ GB}$ 。（可使用計算機輔助計算）

(1) 試問 2 TB 容量的硬碟，可儲存多少 KB 的資料？

(2) 試將 (1) 的結果以科學記號表示且將係數部分四捨五入至小數點後第三位。

7. 若某流感病毒的直徑約為 95 奈米且 1 奈米等於 10^{-7} 公分，將其以科學記號表示時為多少

公分？

8.現在只要將廢棄車交給合法回收業者並索取環保署開立的廢機動車輛回收管制聯單，在報廢前後6個月內購買新車並完成新領牌照登記，檢具廢機動車輛回收管制聯單影本及監理站機車各項異動登記書影本，就可以依財政部貨物稅條例申請辦法，該新機車可申請減徵貨物稅4千元，另外對於車齡達7年的機車，可向環保署申請回收獎勵金300元。由於二行程機車排放的碳氫化合物污染高於其他車輛，為加速汰換二行程機車，環保署今年最後特別加碼補助500元，明年起則無此特別加碼補助。杰孙六年前買了一輛買價為4萬元的全新二行程機車，依二手市場的行情，該車的價值在買後的前三年，每年車價均降為前一年的 $\frac{2}{3}$ ，第四年以後每年折舊前一年車價的25%，試回答下列各題：

- (1)今年在二手市場中，杰孙的此輛車價格為何？
- (2)若今年杰孙將此輛車申請報廢並馬上購買新車，則共可折免多少錢？(含減徵貨物稅)
- (3)若明年杰孙才想換車，則明年應選擇將此輛車轉賣二手市場，還是直接申請報廢才划算？【素養題】

➤ 常用對數練習題

1.試求下列對數的值：

(1) $\log 100000 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。 (2) $\log 0.00001 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

2.計算 $\log 100 + \log 10000 + \log 0.001 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。【新課綱自命題】

3. $\log 1000 + \log (10 \times \sqrt[3]{10}) - \log \frac{1}{100\sqrt{10}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。【高師大附中】

4.(1) 設 $10^x = 7$ ，則 $x = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

(2) 設 $10^{\log y} = 19$ ，則 $y = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

(3) $10^{\log 293} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

5. 計算 $10^{\log 3} + 10^{\log 4} - 10^{\log 5} =$ 【 】。【新課綱自命題】

6. 若 $\log a = 3.5$ ， $\log b = 1.5$ ，試問 a 是 b 的 【 】 倍。

7. 設 $a = \log 5$ ， $b = \log 2$ ，試求 $10^{a-b+1} =$ 【 】。

8. 已知 $x = \log(1.9)$ ，求 $10^{x+1} + 3 \times 10^{-x-1} =$ 【 】。【興大附中】

9. 已知 $\log a = -4.32$ ， $\log b = -7.89$ ， $\log c = -14.21$ ，則 $\frac{ab}{c} =$ 【 】。

10. 若 x, y 為兩正實數，且滿足 $x^{\frac{-1}{3}} y^2 = 1$ 及 $2 \log y = 1$ ，則 $\frac{x-y^2}{10} =$ 【 】。【111.學測 B】

11. 設 $\log 2 = a$ ， $\log 3 = b$ ，試以 a, b 表示 $\log \sqrt{15} =$ 【 】。

12. 已知 $\log a = 5.432$ ：

(1) 若 $b = 1000a$ ，試求 $\log b =$ 【 】。

(2) 若 $c = \frac{1}{100}a$ ，試求 $\log c =$ 【 】。

13. 設甲數的常用對數值是 7.81，若乙數為甲數的 100 倍，則乙數的常用對數值為【 】。
14. 已知 $\log a = 13.36$ ，且將 a 表示為科學記號時為 $b \times 10^n$ ，其中 $1 \leq b < 10$ ， n 為整數，則 $n =$ 【 】。
15. 若 $\log 9453$ 的值介於正整數 n 與 $n+1$ 之間，則 n 的值為【 】。
16. 已知 $10^{0.3010} \approx 2$ ，試求 2^{25} 為【 】位數。
17. 設 $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ ，則 $\log 210 \approx$ 【 】。
18. 已知芮氏地震規模 R 與所釋出能量 E 之間的關係式為 $\log E = 1.5R + 11.8$ ，則地震規模 7.2 所釋出的能量是地震規模 5.2 所釋出能量的【 】倍。【素養題】
19. 熱鬧的跨年晚會上，藝人阿妹在高升的舞臺上飆出她的招牌高音，無緣進入會場的小玉只好觀看現場直播的電視牆。已知每一臺電視發出 100 分貝的聲音，且聲音的分貝 S 與強度 W 的關係為 $S = 10 \times \log W$ ，則有 10 臺電視的電視牆（即聲音強度變為 10 倍）共發出【 】分貝的聲音。【素養題】

20. 我們常以 pH 值來表示溶液的酸鹼程度，在 25°C 的情況下，水溶液的氫離子濃度與氫氧根離子濃度相乘都為定值，即 $[\text{H}^{+}][\text{OH}^{-}] = 10^{-14}$ 。而 pH 值的計算方法如下：pH 值 $= -\log[\text{H}^{+}]$ ，例如某杯氫離子濃度 $[\text{H}^{+}] = 10^{-6}$ 的溶液，其 pH 值 $= -\log 10^{-6} = 6$ 。若在 25°C 的情況下，測得某水溶液的氫氧根離子 $[\text{OH}^{-}] = 5 \times 10^{-3}$ ，則其 pH 值介於 a 與 $a+1$ 之間，其中 a 為整數，則 a 的值為【 】。【武陵高中】【素養題】

➤ 回家作業

1. 計算下列各式，並以科學記號表示：

(1) $1.23 \times 10^4 + 3.27 \times 10^6 = \text{【 】}$ 。(2) $(3.24 \times 10^8) \div (1.8 \times 10^6) = \text{【 】}$ 。

2. 計算下列各式的值，並以科學記號表示：

(1) $3.5 \times 10^5 + 2.8 \times 10^4 = \text{【 】}$ 。

(2) $6.5 \times 10^5 - 7.8 \times 10^4 = \text{【 】}$ 。

(3) $(3 \times 10^{-3}) \times (2.4 \times 10^{-2}) = \text{【 】}$ 。

(4) $(7 \times 10^2) \div (2.8 \times 10^3) = \text{【 】}$ 。

3. 計算下列各式之值，並將答案以科學記號表示：

(1) $3.6 \times 10^4 + 1.2 \times 10^3 = \text{【 】}$ 。

(2) $4.6 \times 10^{-2} - 5.9 \times 10^{-3} = \text{【 】}$ 。

(3) $(3.9 \times 10^3) \times (5 \times 10^{-5}) = \text{【 】}$ 。

(4) $(3.2 \times 10^{-4}) \div (2.5 \times 10^{-6}) = \text{【 】}$ 。

4. 已知太陽的質量約為 2×10^{27} 公噸，且地球的質量約為 6×10^{21} 公噸，則太陽的質量為地球的幾倍？（以科學記號表示並將係數部分四捨五入到小數點後第一位）

5. 2015 年時耶魯大學的研究團隊利用衛星及超級電腦等科技工具，計算出地球上約有 3.04 萬億棵樹，假設每棵樹均每年可吸收 18 公斤的二氧化碳，則地球上的樹一年可吸收【 】公斤的二氧化碳。（以科學記號表示且係數部分取二位有效數字）

6. 已知一天有 24 小時，1 小時有 60 分鐘，1 分鐘有 60 秒，試問七天有【 】秒。（以科學記號表示取至三位有效數字）

7. 國際天文學聯合會（International Astronomical Union，簡稱 IAU）目前使用 IAU2009 天文

常數系統，涵蓋天文學使用的各種常數值。例如，光的速度是 2.99792458×10^8 公尺／秒，一天文單位 (au) 是 $1.49597870700 \times 10^{11}$ 公尺。試根據這些資料回答下列問題：

- (1) 光年就是光在一年所走的距離，試以科學記號表示一光年約有幾公里？(一年以 365.25 日計算，可使用計算機輔助作答，係數部分四捨五入到小數點後第二位)
- (2) 一天文單位是指太陽到地球的平均距離，請計算太陽光從太陽到地球大約需要幾秒鐘的時間？(可使用計算機輔助作答，四捨五入到整數位) 【素養題】

8. 計算 $\log 100 + \log 1 + \log 0.001 =$ 【 】。【臺中二中】

9. 計算 $\log \frac{\sqrt{10}}{100} \times \log 100\sqrt{10} =$ 【 】。【新課綱自命題】

10. 試求 $\log 1 + \log \sqrt{10} + \log 10 + \log 100 =$ 【 】。

11. (1) 設 $10^x = 23$ ，則 $x =$ 【 】。 (2) $10^{\log 23} =$ 【 】。

(3) 試求下列對數的值：

① $\log 10000 =$ 【 】。 ② $\log 0.001 =$ 【 】。

12. 若 $\log a = -3.5$ ， $\log b = -0.5$ ，則 a 是 b 的 【 】 倍。

13. 若 $\log a = 8.7$ ， $\log b = 5.7$ ，則 a 是 b 的 【 】 倍。

14. 假設 $\log 3 = a$ ， $\log 30 = b$ ， $\log 300 = c$ 。試求下列各式之值：

(1) $a - b =$ 【 】。

(2) $a + c - 2b =$ 【 】。

15. 已知 $\log a = -2.546$ ， $\log b = -4.805$ ， $\log c = -10.351$ ，則 $\frac{ab}{c} =$ 【 】。

16. 若 $\log a = 5.2$ ， $\log b = 3.2$ ，則 a 是 b 的 【 】 倍。

17. 已知某數 A 為 6 位數且 $n \leq \log A < n+1$ (n 為整數)，則 $n =$ 【 】。

18. 甲數的常用對數值是 5.26，試求：

(1) 若乙數為甲數的 10 倍，則乙數的常用對數值為 【 】。

(2) 若丙數為甲數的 $\frac{1}{100}$ 倍，則丙數的常用對數值為 【 】。

19. 已知整數 a 滿足 $a < \log 38385438 < a+1$ ，則 a 值為 【 】。【新課綱自命題】

20. 假設 $\log 2 = a$, $\log 200 = b$, $\log 2000 = c$ 。試求下列各式之值：

(1) $b - a =$ 【 】。 (2) $b + c - 2a =$ 【 】。

21. 設 $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, $a = b^2$, 則 $\frac{\log a}{\log b} =$ 【 】。

22. 若溶液中的氫離子濃度為 $a \text{ mol/L}$, 規定它的 pH 值是 $-\log a$ 。若溶液 A 的 pH 值為 2.5, 溶液 B 的 pH 值為 6.5, 則溶液 A 中的氫離子濃度是溶液 B 中氫離子濃度的【 】倍。【素養題】

23. 某公司研發益生菌, 此菌種每 1 日之後會增為 a 倍。若已知 3 日後的細菌數為 32000 個, 6 日後的細菌數為 2048000 個, 若適合人體食用的益生菌必須超過 10 億個, 則從一開始培養到適合人體食用必須至少經過【 】天。【高師大附中】

24. 設 $E(r)$ 為芮氏規模 r 的地震震央所釋放出的能量, $E(r)$ 與 r 的關係為 $\log E(r) = 1.5r + 11.8$ 。已知 1964 年 1 月 18 日臺南白河地震的規模是 6.3, 1935 年 4 月 21 日新竹關刀山地震的規模是 7.1 (資料來源: 中央氣象局)。則新竹關刀山地震所釋放出的能量是臺南白河地震的【 】倍。(已知 $10^{0.2} \approx 1.585$, 四捨五入至整數位)

25. 若 x, y 為實數, 且 $a > 0$, $b > 0$, 已知 $2x + 3y = 4$, 且 $\log a = 2x$, $\log b = 3y$, 則 $a + b$ 的最小值為【 】。【松山高中】

26. 為了準備某校 11 月 12 日的校慶園遊會活動, 某班自信推出黃金比例的特調飲料, 其中一款是 pH 值為 2 的梅子汁和 pH 值為 3 的可樂以 1:8 的比例調製而成, 請問這款「梅子可樂」的 pH 值為【 】。(答案需四捨五入至小數點後第 1 位)(液體的氫離子濃度為 x 莫耳/公升, pH 值定為 $-\log x$, $\log 2 \approx 0.3010$)【松山高中】

27. 已知聲音分貝 D (dB) 與聲壓 P (μPa) 之間的關係為 $D = 20 \log \frac{P}{20}$ 。在運動比賽中, 熱

情的球迷都會用瓦斯氣笛加油。一支瓦斯氣笛可以發出 80 分貝的聲音。請問滿場有一千支瓦斯氣笛一起發出聲音, 則會發出多少分貝的聲音?

註: 假設聲音的聲壓是加成的, 即一千支氣笛的聲壓是一支氣笛的一千倍。【素養題】