

目錄

第 1 回	乘法公式.....	3
第 2 回	整數相關(課外補充).....	5
第 3 回	有理數表示法.....	7
第 4 回	根式化簡(基礎篇).....	10
第 5 回	根式化簡(進階篇).....	12
第 6 回	有理數綜合觀念與推理.....	15
第 7 回	分點公式.....	16
第 8 回	以大小順序為解題關鍵.....	18
第 9 回	算幾不等式.....	19
第 10 回	絕對值(基礎篇).....	23
第 11 回	絕對值(進階篇).....	25
第 12 回	數與式綜合題.....	29
第 13 回	指數律(基礎篇).....	31
第 14 回	指數律(進階篇).....	33
第 15 回	指數大小關係與綜合問題.....	36
第 16 回	指數應用.....	40
第 17 回	科學記號&常用對數.....	43
第 18 回	對數應用.....	46
第 19 回	斜率.....	48
第 20 回	直線方程式.....	51
第 21 回	直線之圖形問題(平行、垂直、面積).....	53
第 22 回	直線之圖形問題(對稱、綜合).....	56
第 23 回	點到直線距離、平行線距離、角平分線.....	59
第 24 回	重心、內心、外心、垂心.....	62
第 25 回	二元一次不等式.....	64

第 26 回	圓之定義、標準式、一般式.....	67
第 27 回	圓方程式與距離概念的綜合應用.....	69
第 28 回	圓與直線的圖形關係.....	71
第 29 回	圓的切線.....	73
第 30 回	圓系、綜合問題.....	76
第 31 回	多項式基本觀念.....	77
第 32 回	綜合除法.....	81
第 33 回	插值法.....	83
	牛頓插值法.....	83
	拉格朗日插值法、差分法 [課外補充].....	84
第 34 回	除法原理.....	86
第 35 回	餘式定理.....	90
第 36 回	因式定理.....	95
第 37 回	線型函數.....	98
第 38 回	二次多項式(基礎篇).....	99
第 39 回	二次多項式(進階篇).....	103
第 40 回	二次多項式(最大最小值問題).....	107
第 41 回	高次多項式.....	113
第 42 回	奇偶函數 [課外補充].....	115
第 43 回	多項不等式.....	117
第 44 回	多項不等式(題型篇).....	120
第 45 回	高次多項不等式、分式不等式.....	122
第 46 回	指數、多項式、不等式混合題.....	125

第 1 回 乘法公式

1. 若 $a^2 + b^2 = 9$ ， $(a - b)^2 = 17$ ，則 $(a + b)^2 =$ _____。
2. 設 $0 < x < 1$ ，已知 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 2 + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2 = 5$ ，試求 $x =$ _____。
3. 因式分解： $x^4 - 27x^2 + 1 =$ _____。
4. 設 a 、 b 是實數，已知 $(a + b)^3$ 比 $a^3 + b^3$ 多了 720， $(a - b)^3$ 比 $a^3 - b^3$ 少了 144，則數對 $(a, b) =$ _____。
5. 已知 $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ ， $y = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ ，則 $x^3 + y^3$ 之值為_____。

6. 設 $x = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ ，求 $x^3 - \frac{1}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化成最簡)

===== 挑戰區 =====

7. 已知 $t + \frac{1}{t} = 4$ ，則：(1) $t^3 + \frac{1}{t^3} = ?$ (2) $t^4 + \frac{1}{t^4} = ?$

8. 設實數 x 、 y 滿足 $x + 2y = 3$ ， $x^3 + 8y^3 = 9$ ，求 $x^2 + 4y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 設正實數 a 、 b 滿足 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = 0$ ，則 $\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: 1. 1 2. $\frac{2}{5}$ 3. $(x^2 - 5x - 1)(x^2 + 5x - 1)$ 4. (6, 4) 5. $-\frac{5}{2}$ 6. $8\sqrt{5}$ 7. (1) 52 (2) 194

8. 5 9. -4

第 2 回 整數相關(課外補充)

1. 某城市夏季用電計費標準如下表，假設若某家庭七月(夏季)電費為 1000 元，則該家庭七月用電度數為_____度。

夏季每月用電度數	單位：元／度
110 度以下	2
111~330 度	3
331~500 度	4
501 度以上	5

2. 試問有多少個正整數 n 使得 $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{10}{n}$ 為整數？
(A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個 (E) 5 個

===== 挑戰區 =====

3. 符合 a 為正整數， $a \leq 400$ ，且 a 與 240 的最大公因數為 8，則 a 值有_____個。
4. 某次選舉，有候選人 10 名，有效票 500 張，當選名額為 3 名(即得票數最高的前 3 名當選)，那麼對一名候選人而言，至少需得_____票，才能保證當選。
5. 已知 x 、 y 為整數，若 $x^2 - xy + y^2 = 3$ ，則 $x^2 + y^2 =$ _____。(有二解)

6. 求在 2 與 250 之間且與 2730 互質的所有合數之總和 = _____。

7. a 、 b 均為整數，若 $315a + 73b = 1$ ，則 $|a + b|$ 的最小值 = _____。

Ans: 1. 360 2. D 3. 14 4. 126 5. 2或5 6. 517 7. 63

第 3 回 有理數表示法

1. $0.\overline{378} =$ (A) $\frac{14}{37}$ (B) $\frac{15}{37}$ (C) $\frac{16}{37}$ (D) $\frac{17}{37}$ (E) $\frac{18}{37}$

2. 若 $a = 1.\overline{345}$ ，則 $a = ?$
(A) $\frac{1332}{990}$ (B) $\frac{1344}{999}$ (C) $\frac{1344}{990}$ (D) $\frac{1345}{1000}$ (E) $\frac{1123}{900}$

3. 將 $\frac{2}{7}$ 化為小數時，小數點後第 100 位數字為
(A)7 (B)5 (C)2 (D)4 (E)8

4. 下列選項哪些是正確的？
(A) $0.\overline{167}$ 是有理數 (B) $0.\overline{167} = \frac{1}{6}$ (C) $0.\overline{167} > 0.1676$ (D) $0.\overline{167} < 0.1677$ (E) $0.\overline{167} = 0.\overline{1676}$

5. 試選出正確的選項：
(A) $0.\overline{343}$ 不是有理數 (B) $0.\overline{34} > \frac{1}{3}$ (C) $0.\overline{34} > 0.343$ (D) $0.\overline{34} < 0.35$ (E) $0.\overline{34} = 0.\overline{343}$

6. 小江某日執行一計算，因精神不濟，將一正數“乘以 $0.\overline{5}$ ”，誤計算為“乘以 0.55”，導致所得結果相差 3，則此正數應為_____。
7. 已知 $9900 = 4950 \times 2$ 。將分數 $\frac{2357}{4950}$ 化成小數時，小數點後第 103 位數字為_____。
8. 將分數 $\frac{1234}{4995}$ 化為小數，試求：
- (1) 小數點後第 103 位數字。
- (2) 小數點後第 1 位數自至第 103 位數字之和。
9. 設 n 為正整數，下列敘述哪些是正確的？
- (A) 若 $\frac{n}{16}$ 非整數，則 $\frac{n}{16}$ 必可化為有限小數
- (B) 若 $\frac{n}{27}$ 非整數，則 $\frac{n}{27}$ 必可化為循環小數
- (C) 若 $\frac{n}{15}$ 非整數，則 $\frac{n}{15}$ 必可化為循環小數
- (D) $\frac{n}{987654321}$ 可能為不循環的無限小數
- (E) 若 $\frac{n}{16}$ 可化為有限小數，則小數部份最多 4 位
10. p 為一個二位數的正整數，若 $\frac{105}{p}$ 為有限小數，則 p 的最大值為_____。

11. 有一分數 $\frac{315a21}{24}$ 化為小數時為有限小數，其中 a 為 0 到 9 的整數，則滿足此條件的 a 有 _____ 個。

12. 將 $\frac{5}{7}$ 化為小數時，設小數點後第 n 位的數字記為 $f(n)$ ，則下列哪一個數最大？

(A) $f(101)$ (B) $f(202)$ (C) $f(303)$ (D) $f(404)$ (E) $f(505)$

13. 設 a 為 1 至 9 的正整數，且 $\frac{13}{99} < 0.\overline{1a2} < \frac{14}{99}$ ，則 $a =$ _____。

14. 已知 $\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}$ ， $\frac{5}{13} = 0.\overline{384615}$ 。設 n 為正整數，若將 $\frac{n}{13}$ 化成小數，

且令小數點後第 n 位數字為 $f(n)$ (例如 $f(1) = 0$)，則下列敘述何者正確？

(A) $f(2) = 7$ (B) $f(5) = 1$ (C) $f(100) = 3$ (D) $f(105) = 6$ (E) $f(2011) = 6$

Ans: 1. A 2. A 3. A 4. ACD 5. BCDE 6. 540 7. 6 8. (1) 0 (2) 376 9. ABE 10. 96 11. 4 12. A 13. 3 14. BCDE

第 4 回 根式化簡(基礎篇)

1. 化簡 $\sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2} + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 化簡 $\sqrt{48} - \sqrt{108} + 3\sqrt{75} - 3\sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 試化簡 $\frac{5 + \sqrt{6}}{3 - \sqrt{6}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 化簡 $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 將 $\sqrt{24} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6} + 2}$ 化成最簡根式之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 若 $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2+m} = \sqrt{5}-1$ ，則 $m =$ _____。

7. 設 a 、 b 為有理數，且 $(a+b\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = (-2+\sqrt{3})$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

8. 若 a 、 b 是有理數且 $(1+2\sqrt{2})a + (3+4\sqrt{2})b = 5+6\sqrt{2}$ ，試求 $7a+8b =$ _____。

9. 設 $\sqrt{7}$ 的小數部分為 b ，則 $\frac{1}{b} + \frac{1}{b+4} =$ _____。

Ans: 1. $\frac{21}{20}$ 2. $10\sqrt{3}$ 3. $\frac{21+8\sqrt{6}}{3}$ 4. $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-3}{2}$ 5. $\sqrt{6}+1$ 6. $\sqrt{5}$ 7. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 8. 9 9. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

第 5 回 根式化簡(進階篇)

1. 化簡 $\sqrt{359\frac{1}{361}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ，求 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 設 $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ，求 (1) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $x^3 + \frac{1}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 設 $x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ，試求下列各式的值：

(1) $x + \frac{1}{x}$ (2) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (3) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

5. 設正整數 k 滿足 $k < \sqrt{10 + \sqrt{37}} < k + 1$ ，則 $k =$ _____。
6. $\sqrt{74} - \sqrt{47}$ 介在哪兩個連續整數之間？
(A) 5 與 6 (B) 6 與 7 (C) 7 與 8 (D) 8 與 9 (E) 9 與 10
7. 若 $\sqrt{10 + 2\sqrt{24}} = x + y$ ，其中 x 為整數，且 $0 < y < 1$ ，則 $\frac{2}{y} + 2 =$ _____。
8. 已知 $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，試求 $a + \frac{1}{b} =$ _____。
9. 設 $\sqrt{11 + \sqrt{72}}$ 之小數部分為 x ，則 $\frac{x}{x+2} =$ _____。
10. 設 $a = \frac{1}{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}$ ， a 的小數部分為 x ， $b = 1 - x$ ，試求下列各式的值：
(1) x (2) $a + b$ (3) ab (4) $a^2 + b^2$ (5) $a^3 + b^3$

11. 化簡 $\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$ 得其值為_____。

12. 設 a 、 b 都是有理數，且 $\frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$ ，試求數對 $(a, b) =$ _____。

===== 挑戰區 =====

13. 若 a 是正整數，且 $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{a+5\sqrt{12}}$ 是有理數，試求 a 的值 =_____。

14. 若 x 、 y 為有理數，且 $x + y\sqrt{16+\sqrt{252}} = x\sqrt{8-\sqrt{28}} + 10$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

15. 設正整數 x 、 y 滿足 $\sqrt{11-4\sqrt{6}}(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}) = 5\sqrt{2}$ ，求數對 $(x, y) =$ _____。

Ans: 1. $\frac{360}{19}$ 2. 98 3. (1) 34 (2) 198 4. (1) 8 (2) 62 (3) 488 5. 4 6. D 7. $4 + \sqrt{6}$

8. $4 + \sqrt{3}$ 9. $3 - 2\sqrt{2}$ 10. (1) $\sqrt{3} - 1$ (2) 4 (3) 1 (4) 14 (5) 52 11. $-\sqrt{2}$ 12. $(6, -3)$ 13. 28 14. $(2, 2)$ 15. $(11, 5)$

第 6 回 有理數綜合觀念與推理

1. 下列何者為無理數？ (A) π (B) $\sqrt{121}$ (C) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ (D) $0.\overline{245}$ (E) $\sqrt{160}$
2. 設 x 、 y 均為有理數且滿足 $(2x-4)+(-x+5y-3)\sqrt{2}=0$ ，則數對 $(x, y)=$ _____。
3. 下列敘述哪些是正確的？
(A) 若 a 、 b 為有理數，則 $a+b$ 必為有理數
(B) 若 a 、 b 為無理數，則 $a+b$ 必為無理數
(C) 若 a 為有理數， b 為無理數，則 $a+b$ 必為無理數
(D) 若 a 為有理數， b 為無理數，則 ab 必為無理數
(E) 若 a 、 b 為實數，且 $a+b\sqrt{2}=3+4\sqrt{2}$ ，則 $a=3$ ， $b=4$
4. 下列哪些選項為正確？ (A) 數線上兩個相異有理數之間必存在另一個有理數 (B) $\sqrt{0.4}$ 為無理數
(C) 若 a 為有理數， b 為無理數，則 ab 必為無理數
(D) 設 a 、 b 均為實數，若 $a+b$ 為有理數且 ab 為無理數，則 $a-b$ 必為無理數
(E) 若 $a+b$ 、 $2a-3b$ 都是有理數，則 $103a+2014b$ 為有理數
5. 下列哪些選項是正確的？
(A) 若 a^3 是有理數，且 a^8 是有理數，則 a 是有理數 (B) 若 a 、 b 都是無理數，則 $a+b$ 也是無理數
(C) 設 a 、 b 均為實數，若 $a+b$ 為有理數，且 ab 為無理數，則 $a-b$ 必為無理數
(D) 設 a 、 b 均為實數，若 $a < b$ ，則 $\frac{a+2b}{3} < \frac{2a+b}{2}$ (E) $\sqrt{0.4}$ 為有理數

Ans: 1. ACE 2. (2, 1) 3. AC 4. ADE 5. ACE

第 7 回 分點公式

1. 設 $A(3)$ 、 $B(8)$ 是數線上給定的兩點， P 是 $\overline{AB}$ 上一點，若 $\overline{AP}:\overline{BP}=7:13$ ，則 P 點坐標為_____。
2. 數線上 P 、 Q 兩點的坐標分別為 1、15， R 點在 P 、 Q 之間且 $\overline{PR}:\overline{QR}=3:4$ ，則 R 點坐標為_____。
3. 數線上兩點 $A(-3)$ 、 $B(7)$ 。已知 $P(x)$ 為 $\overline{AB}$ 外一點，且 $\overline{PA}:\overline{PB}=1:3$ ，則 $x=_____$ 。
4. 數線上兩點 $A(-1)$ 、 $B(15)$ ，已知 $P(x)$ 點為 $\overline{AB}$ 外一點，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:5$ ，求 $x=_____$ 。
5. 設 A 、 B 、 P 為數線上三點，若 A 、 B 的坐標分別為 -6 和 3 ，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=5:2$ ，試求 P 點的坐標為_____。(兩解)

6. 設 A 、 B 、 P 為數線上相異三點，若 A 、 B 的坐標分別為 4 、 -11 ，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$ ，則點 P 坐標為_____。(有二解)
7. 設 a 、 b 均為有理數且 $a < b$ ，若 $p = \frac{a+2b}{3}$ ， $q = \frac{a+3b}{4}$ ， $r = \frac{2a+5b}{7}$ ，則 p 、 q 、 r 三數的大小關係為：_____。
8. 設 a 、 b 為實數且 $a < b$ ，若 $P = \frac{a+3b}{4}$ ， $Q = \frac{2a+3b}{5}$ ， $R = \frac{3a+2b}{5}$ ，則 P 、 Q 、 R 的大小順序為_____。
9. 已知 a 、 b 都是實數且 $a < b$ ，則下列敘述哪些正確？ (A) $\frac{2a+3b}{5} < \frac{3a+2b}{5}$ (B) $\frac{2a+b}{3} < \frac{3a+2b}{5}$
 (C) $\frac{2a+3b}{5} < \frac{2a+4b}{5}$ (D) $\frac{2a+b}{4} < \frac{3a+2b}{5}$ (E) $\frac{3a+2b}{5} < \frac{3a+4b}{7}$

Ans: 1. $\frac{19}{4}$ 2. 7 3. -8 4. -25 5. (1) $\frac{3}{7}$ (2) 9 6. $-2, 34$ 7. $p < r < q$

8. $P > Q > R$ 9. BE

第 8 回 以大小順序為解題關鍵

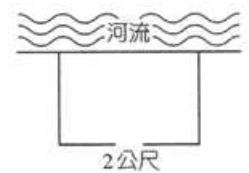
1. 下列各數何者在整數 2 和 3 之間？ (A) $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{\frac{40}{7}}$ (C) $\sqrt{13-2\sqrt{22}}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ (E) $2.\overline{36}$
2. 設 k 為一整數。已知 $\frac{k}{4} < \sqrt{29} < \frac{k+1}{4}$ ，則 k 的值為_____。
3. 設 a 為正實數， a 的小數部分為 b ， $a^2 + b^2 = 40$ ，則 $b =$ _____。
4. 正實數 a 之小數部分為 b ，若 $a^2 + b^2 = 6$ ，則 $a =$ _____。
5. 若 $a = \sqrt{10} + \sqrt{3}$ 、 $b = \sqrt{11} + \sqrt{2}$ 、 $c = \sqrt{8} + \sqrt{5}$ ，則 a 、 b 、 c 之大小順序為_____。
6. 若 $a = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$ ， $c = \sqrt{10} - \sqrt{7}$ ，則 a 、 b 、 c 之大小順序為_____。

Ans: 1. ABE 2. 21 3. $-3 + \sqrt{11}$ 4. $1 + \sqrt{2}$ 5. $b < a < c$ 6. $c < b < a$

第 9 回 算幾不等式

1. 已知正數 a 、 b 滿足 $ab=16$ ，則 $4a+b$ 的最小值為_____。
2. 若 a 、 b 皆為正實數且 $ab=16$ ，則當數對 $(a,b)=$ _____時， $2a+8b$ 會有最小值。
3. 已知 $x,y>0$ ，且 $xy=12$ ，求 $3x+y$ 的最小值為_____。
4. 若 a 、 b 為兩正實數，且 $5a+2b=10$ ，則 $2ab$ 的最大值為_____。
5. 設 $x>0$ ， $y>0$ ，且 $xy=100$ ，求 $\frac{1}{x}+\frac{16}{y}$ 的最小值為_____。
6. 設 $a>0$ ， $b>0$ ，已知 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$ ，求 ab 的最小值=_____。
7. 已知一直三角形斜邊上的高其長度為 5，請問這個直角三角形的面積的最小值=_____。

8. 如右圖所示，用 40 公尺長的繩子在筆直的河岸邊圍出一塊矩形農地(靠河岸的那一邊不會用到繩子)。並在河岸對面邊上的正中央保留寬 2 公尺的出入口，則所能圍出矩形的最大面積為_____平方公尺。



9. 用總長度 70 公尺的鐵絲網要在河岸圍出一塊長方形土地，若沿河岸的一邊不圍，且要留下 2 公尺的出入口，如右圖所示，試求所圍成土地的最大面積為_____平方公尺。



10. 阿明想利用 60 公尺長的鐵絲網圍成兩個大小一樣的矩形養雞場，如右圖，則此兩個養雞場的面積和最大為_____平方公尺。



11. 如圖所示， $PQRS$ 為一給定的矩形，長 $\overline{PQ} = 12$ ，寬 $\overline{QR} = 3$ ，而 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，

其中 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， P 、 Q 在 $\overline{BC}$ 邊上， R 、 S 分別在 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 邊上， $\overline{QC} = x$

(1) $\triangle ASR$ 中， $\overline{SR}$ 邊上的高度為 $\overline{AM}$ ，則 $\overline{AM} = ?$ (以 x 表之)

(2) $\triangle ABC$ 面積 = ? (以 x 表之)

(3) $\triangle ABC$ 的面積最小值為何？

12. 兩正數 a 、 b 滿足 $a^2 + 4b^2 = 8$ ，則 ab 之最大值為_____。

13. 設兩正數 a 、 b 滿足 $4a^2 + 9b^2 = 25$ ，求 $(2a + 3b)^2$ 之最大值為_____。

14. 設 $x, y > 0$ 且 $\frac{9}{x} + \frac{4}{y} = 1$ ，求 $(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}})^2$ 的最大值為_____。

15. 下列敘述哪些是正確的？

(A) 設 x 為任意實數且 $y = x + \frac{1}{x}$ ，則 $y \geq 2$ 必成立，且 y 的最小值為 2

(B) 設 x 為任意實數且 $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ，則 $y \geq 2$ 必成立，且 y 的最小值為 2

(C) 設 x 為任意實數且 $y = (x^2 - 3) + \frac{1}{(x^2 - 3)}$ ，則 $y \geq 2$ 必成立，且 y 的最小值為 2

(D) 設 x 為任意實數且 $y = (x^2 + 1) + \frac{1}{(x^2 + 1)}$ ，則 $y \geq 2$ 必成立，且 y 的最小值為 2

(E) 設 x 為任意實數且 $y = (x^2 + 5) + \frac{1}{(x^2 + 5)}$ ，則 $y \geq 2$ 必成立，且 y 的最小值為 2

16. 設 $x > -1$ ，若 $x + 4 + \frac{4}{x+1}$ 的最小值為 m ，且此時的 $x = a$ ，則數對 $(a, m) =$ _____。

17. 設 a, b, c, d 為四個正實數，且 $a + b + c + d = 12$ 。則 $ab + ac + ad$ 之最大值為_____。

18. 在解方程式 $x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{19}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 = 0$ 的時候，先同乘以 6 變成 $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ ；因顯然

0 不是它的解，所以我們把此方程式同除以 x^2 後得到新的方程式 $6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$ ，

(1) 令 $t = x + \frac{1}{x}$ ，那麼將方程式整理成 t 的整係數方程式為何？

(2) 將 t 解出來後代回原方程式求解得到 x 的解為何？

Ans: 1. 16 2. (8, 2) 3. 12 4. 5 5. $\frac{4}{5}$ 6. 24 7. 25 8. $\frac{441}{2}$ 9. 648 10. 150

11. (1) $\frac{18}{x}$ (2) $\frac{108}{x} + 36 + 3x$ (3) 72 12. 2 13. 50 14. 2 15. BD 16. (1, 7) 17. 36

18. (1) $6t^2 - 5t - 50 = 0$ (2) $\frac{1}{3}$ 或 3 或 $-\frac{1}{2}$ 或 -2

第 10 回 絕對值(基礎篇)

1. 不等式 $|x-2| < 3$ 的解為_____。
2. 若 $|3x+1|=6$ 表示 x 在數線上與 a 相距為 b ，則數對 (a, b) 的值為何？
(A) $\left(\frac{1}{3}, 6\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ (C) $\left(-\frac{1}{3}, 6\right)$ (D) $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$ (E) $(1, 2)$
3. 滿足不等式 $2 \leq |x-1| < \sqrt{26}$ 的整數 x 有_____個。
4. 設 x 為整數，則滿足 $|2x+5| \leq 9$ 之解有幾個？
(A)9 個 (B)10 個 (C)11 個 (D)12 個 (E)無限多個
5. 設 a 為整數，則滿足 $2 < |3-2a| < 10$ 的 a 有 (A)5 (B)6 (C)7 (D)8 (E)9 個。
6. 解方程式 $3|x-1|-2|x+2|=1$ 。

7. 解不等式 $|x-3|+|x+4|<11$ 。

8. 設 x 為實數，試解不等式： $2|x+2|-|2x-1|\geq x+1$

9. 設 a 、 b 都不是為 0 的實數，則下列敘述何者正確？

(A) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (B) 若 $|a|=a$ ， $|b|=b$ ，則 $|a+b|=|a|+|b|$

(C) 若 $|a|=-a$ ， $|b|=-b$ ，則 $|a+b|=-(|a|+|b|)$ (D) 若 $\frac{a}{b}>1$ ，則 $a>b$ (E) 若 $a>b$ ，則 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 。

Ans: 1. $-1 < x < 5$ 2. D 3. 8 4. B 5. D 6. 8 或 $-\frac{2}{5}$ 7. $-6 < x < 5$

8. $x \leq -6$ 或 $-\frac{2}{3} \leq x \leq 4$ 9. AB

第 11 回 絕對值(進階篇)

1. 若 $|ax + 1| \leq b$ 的解為 $-4 \leq x \leq 8$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。
2. 設 a 、 b 均為實數，若 $|ax + 4| \geq b$ 的解為 $x \geq 7$ 或 $x \leq -1$ ，則數對 (a, b) 為_____。
3. 設 a 、 b 皆為實數且 $b > 0$ ，若 $|ax - b| \leq 8$ 之解為 $-1 \leq x \leq 7$ ，則 $a - b =$ _____。
4. 設 a 、 b 為實數， $|ax - 0.2\bar{7}| \leq b$ 之解為 $\frac{-14}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。
5. 已知兩實數 x 、 y 滿足 $|x - 4| + (y - 5)^2 = 0$ ，求數對 $(x, y) =$ _____。
6. 設 a 、 b 、 c 為整數，若 $|a + 1| + 2|b - 2| + 3|c - 1| = 2$ ，則 $a + b + c$ 的最大值為_____。

7. 利用三角不等式，可求 $|2x-3|+|2x+5|$ 的最小值為_____。

8. 設 x 為實數且 $y = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+4)^2}$ ，則 y 之最小值為_____。

9. 求函數 $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ 之最小值=_____。

10. 已知 $1 < x < 2$ ，且 $\sqrt{(1 + \frac{1}{x-1})^2} + \sqrt{(1 - \frac{1}{x-1})^2} = 5$ ，則 $5x =$ _____。

11. 關於數線上的幾何，下列哪些選項是正確的？

(A) $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{3} > \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{5}$ (B) a 、 b 為不為零的實數，若 $a < b$ ，則 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(C) 方程式 $|x-6| + |x-1| = 5$ 沒有實數解 (D) 不等式 $|2x-1| \leq 5$ 的解在數線上所占的長度為5

(E) $\sqrt{(3-\pi)^2} + \sqrt{(3+\pi)^2} = 6$ ，其中 π 是圓周率

12. x 、 y 均為實數，若 $|x-1| \leq 5$ ， $|y-1| \leq 6$ ，則 $xy-2y$ 的最大值 = _____。

13. 設實數 x 、 y 滿足 $|x-1| \leq 2$ ， $|2y+1| \leq 5$ ，求 $3xy-3x+2y$ 的最大值為 _____。

===== 挑戰區 =====

14. (1) 求 $f(x) = |x+5| + |x-2| + |x-1|$ 之最小值與此時 x 值之範圍。

(2) 求 $f(x) = |x+5| + |x-2| + |x-1| + |x+3|$ 之最小值與此時 x 值之範圍。

15. 若 x 為實數，則 $|x-3| + 2|x-2| + 3|x-1| + |x|$ 的最小值為 _____。

16. 設 k 為實數，若方程式 $x|x+2| = k$ 恰有一實根，則 k 之範圍為 _____。

17. x 、 y 均為實數，則 $|x-2|+|y+3|=6$ 在坐標平面上的圖形周長為_____。

18. 已知 $A(-4, -4)$ 、 $B(-1, 2)$ 、 $C(1, 6)$ 在直線 $L: 2x - y + 4 = 0$ 上，設動點 P 在直線 L 上，求 $\overline{PC} + 2\overline{PB} + 3\overline{PA}$ 之最小值為_____。

(註：設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ， $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$)

Ans: 1. $(-\frac{1}{2}, 3)$ 2. $(-\frac{4}{3}, \frac{16}{3})$ 3. -4 4. $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ 5. $(4, 5)$ 6. 4 7. 8 8. 7 9. -5 10. 7

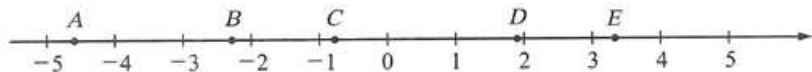
11. AD 12. 30 13. 13 14. (1) 當 $x = 1$ 時，有最小值 7 (2) 當 $-3 \leq x \leq 1$ 時，有最小值 11 15. 5

16. $k < -1$ 或 $k > 0$ 17. $24\sqrt{2}$ 18. $11\sqrt{5}$

第 12 回 數與式綜合題

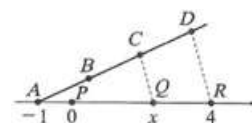
1. 如下圖，英文字母 A 、 B 、 C 、 D 、 E 分別代表數線上的數，則下列哪一個運算結果是負數？

(A) $(A-C) \times B$ (B) $E - A \times B$ (C) $\frac{E}{B} \times C$ (D) $E - B \times C$ (E) $(E+A) \times C$



2. 如右圖， $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ ，而點 A 、 P 、 Q 、 R 在數線上的坐標依序為

-1 、 0 、 x 、 4 ，若 $\overline{CQ}$ 與 $\overline{DR}$ 平行，則點 Q 的坐標_____。



3. 下列敘述哪一個是正確的？ (A) $0.45\overline{9}$ 不是有理數 (B) $0.45\overline{9} < 0.459\overline{5}$ (C) $0.45\overline{9} = 0.46$
(D) 已知一長度為 1 單位的線段，則可以用尺規作圖作出長度 $\sqrt[3]{2}$ 的線段。

4. 下列哪些選項為正確？ (A) $\frac{321}{495} = 0.64\overline{8}$ (B) $\sqrt{10} - \sqrt{2} < \sqrt{11} - 1$

(C) 若 a 、 b 為實數，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恆成立 (D) a 、 b 為實數，若 $a + b\sqrt{2} = 0$ ，則 $a = b = 0$

(E) $\sqrt{3 - \sqrt{10}}$ 可以利用尺規作圖在數線上標出其位置

5. 下列敘述何者正確？ (A) 無限小數皆為無理數 (B) 所有有理數在數線上的位置皆可由尺規作圖得到
(C) a 、 b 、 c 、 d 皆為實數，若 $a > b$ ， $c > d$ ，則 $ac > bd$

(D) a 、 b 、 c 皆為實數，則 $|a-c| + |b-c| \geq |a-b|$

(E) a 、 b 、 c 、 d 皆為實數，若 $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ ，則 $a = c$ 且 $b = d$

6. 下列敘述何者正確？ (A) 若 a 、 b 為實數，且 $a + b\sqrt{5} = 3 + 2\sqrt{5}$ ，則 $a = 3$ 且 $b = 2$
(B) 若 $2014a - 103b$ 與 $17a + 510b$ 均為有理數，則 a 、 b 均為有理數

(C) 若 a 、 b 為實數且 $a < b$ ，則 $a < \frac{\sqrt{2}a + \sqrt{3}b}{\sqrt{5}} < b$ (D) 若 a^4 、 a^7 均為有理數，則 a 為有理數

(E) $\sqrt{11} - \sqrt{7} > \sqrt{9} - \sqrt{5}$

7. 比較 $a = \sqrt{6} - \sqrt{14}$, $b = \sqrt{3} - \sqrt{17}$, $c = \sqrt{5} - \sqrt{15}$ 之大小，由小排到大依序為_____。
8. 設 $a = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{7} + 2$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{5}$, 則 a 、 b 、 c 的大小關係為_____。
9. 如果實數 a 、 b 、 c 滿足 $|a-2| + (a-b-1)^2 + \sqrt{b-c+3} = 0$, 試求 $a+b+c$ 的值為_____。
10. 數線上兩點 $A(19)$ 、 $B(-1)$, 甲、乙兩隻螞蟻分別由 A 、 B 兩點，同時分別以等速度相向於數線上前進，若他們相遇於 $\overline{AB}$ 上 $P(x)$ 點後，繼續前進，當甲站在點 $B(-1)$ 時，乙則是在 $C(29)$ 點，試問 x 之值為_____。
11. 試求在數線上距離 $(4 + \sqrt{12})^3$ 最近的整數 = _____。
12. 已知 $x > 3$, 若 $\sqrt{x^2 + \frac{9}{x^2} - 6} + \sqrt{x^2 + \frac{9}{x^2} + 6} = 8$, 則 $x =$ _____。

Ans: 1. B 2. $\frac{7}{3}$ 3. C 4. AB 5. BD 6. BD 7. $b < c < a$ 8. $a < b < c$ 9. 7 10. 11

11. 416 12. 4

第 13 回 指數律(基礎篇)

1. 選出正確的選項：(A) $2^0 = 0$ (B) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ (C) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ (D) $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{4}$ (E) $2^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2$

2. 設 $2^a = \frac{1}{8}$ ， $2^b = \sqrt{32}$ ，則 $a + 2b =$ _____。

3. 計算 $(0.001)^{-\frac{2}{3}}$ 的值為何？ (A)100 (B)10 (C)1 (D) $\frac{1}{10}$ (E) $\frac{1}{100}$

4. 求 $(0.25)^{1.5} \times \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} =$ _____。

5. 求 $\left(\frac{16}{25}\right)^{-0.5} \times \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \times (0.25)^{-2.5} =$ _____。

6. 已知 $9^x = 6$ ，求 $27^x - 3^{x+2} =$ _____。

7. 解方程式 $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+1} = \left(\frac{1}{256}\right)^{2x-4}$ ，得 $x =$ _____。

8. 計算 $0.027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0.75} - 3^{-1} + (\sqrt{3})^0 = ?$ (A)56 (B)32 (C)28 (D)24 (E)20

9. 求 $9^{\left(-\frac{4}{3}\right)} \times \left(\frac{64}{81}\right)^{-0.25} \times \sqrt{\frac{3^3\sqrt{3}}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. $\sqrt[3]{\sqrt{7} + \sqrt[3]{2}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 已知 $a > 0$ ， $\sqrt[6]{a^5} \times \left(\sqrt[3]{\sqrt[12]{a^7}}\right)^4 = a^x$ ，求 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 化簡 $\sqrt{\sqrt{3^8}} \times \sqrt[6]{27^5} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt{3} = 3^x$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 試求 $2014^0 \times \left(\frac{27}{16}\right)^{\frac{-1}{2}} \times \sqrt[3]{\sqrt{729}} \times \left(3^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)^{\sqrt{2}+1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: 1. BC 2. 2 3. A 4. $\frac{1}{18}$ 5. 90 6. $-3\sqrt{6}$ 7. 5 8. B 9. $\frac{1}{12}$ 10. 3 11. $\frac{43}{36}$ 12. 5

13. 4

第 14 回 指數律(進階篇)

1. 若 $y = a^{x-1} - 2$ 之圖形通過 $(4, 214)$ 、 $(2, b)$ 、 $(c, 34)$ 三點，試求序組 (a, b, c) _____。
2. 假設 a 為實數， n 為正整數， $f(x) = a + 3x^n$ ，若 $f(2) = 14$ ， $f(4) = 50$ ，試求數對 (n, a) _____。
3. 試問下面敘述哪些正確？
(A) 若 n 為實數，則 $1^n = 1$ (B) 若 a 為實數，則 $a^0 = 1$
(C) 若 a 為正實數，則 $a^{\frac{2}{3}}$ 和 $a^{-\frac{2}{3}}$ 互為倒數 (D) 若 a 為非零實數且 m 、 n 為整數，則 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
(E) 若 a 為非零實數且 m 、 n 為實數，則 $(a^m)^n = a^{mn}$
4. 設 $2^x = 9$ ， $3^y = 5$ ， $5^z = 16$ ，試求 $xyz =$ _____。
5. (1) 已知 $a > 1$ ， $b > 0$ ，若 $ab = a^{2b}$ 且 $\frac{a}{b} = a^{14b}$ ，試求 a 之值。
(2) 設 $x > 0$ ，且 $(x\sqrt{x})^{x^2} = x^{2x}$ ，求 $x = ?$

6. 若 $a = \frac{1}{2}(3^4 + 3^{12})$ ， $b = 3^8$ ，則 $\sqrt{2(a-b)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 若 $a^{2x} = 2$ ，則 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 設 $a^{3x} = 3$ ，則 $\frac{a^{5x} + a^{-x}}{a^{2x} + a^{-4x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 解聯立方程式 $\begin{cases} \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^{3y-6}} \\ 3^{15y+3x} = 81^{xy} \end{cases}$ ，求數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 設 $a, b \in \mathbb{R}$ ，若 $37^a = 27$ ， $333^b = 243$ ，則 $\frac{3}{a} - \frac{5}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 設 $351^x = 9$ ， $13^y = 27$ ，求 $\frac{3}{y} - \frac{2}{x} = ?$ (A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 2 (E) 3

12. 設 a 、 b 、 c 皆為實數且 $a \neq 0$ ，若 $16^a = 81^b = \sqrt{216^c}$ ，則 $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} =$ _____。

13. 若 $(0.7)^x = (0.0056)^y = a$ ，且 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ ，則 $a =$ _____。

14. 若 $2^x = 4^y = 8^z = 16^3$ ，則 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} =$ _____。

===== 挑戰區 =====

15. 若 a 、 b 、 c 為任意正實數，且 x 、 y 、 z 為非零之實數， $x + y + z = 0$ ， $a = 10^x$ ， $b = 10^y$ ， $c = 10^z$ ，
則 $a^{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \cdot b^{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}} \cdot c^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} =$ _____。

Ans: 1. (6, 4, 3) 2. (2, 2) 3. ACD 4. 8 5. (1) 16 (2) 1或 $\frac{4}{3}$ 6. 720 7. $\frac{7}{2}$ 8. 3 9. (5, 3)

10. -2 11. A 12. $\frac{8}{3}$ 13. 5 14. $\frac{1}{2}$ 15. $\frac{1}{1000}$

第 15 回 指數大小關係與綜合問題

1. 比較 $a = 4^{\frac{3}{2}}$ 、 $b = \left(\frac{1}{16}\right)^3$ 、 $c = 2^{-3}$ 、 $d = 8^{-1}$ 之大小，則 a 、 b 、 c 、 d 的關係為_____。
2. 下列哪一個數值最大？
(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ (B) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ (C) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{6}}$ (D) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{7}}$ (E) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}$
3. 若 $a = (0.5)^{0.7}$ ， $b = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$ ， $c = \left(\frac{1}{16}\right)^{0.25}$ ， $d = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$ ， $e = (0.25)^{0.36}$ ，五個數的大小順序為_____。
4. 令 $a = 1.5^{10} - 1.5^9$ ， $b = 1.5^{11} - 1.5^{10}$ ， $c = \frac{1.5^{11} - 1.5^9}{2}$ 。請選出正確大小關係：
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > a > c$ (D) $b > c > a$ (E) $c > b > a$

5. 求不等式 $(0.3)^{2x-3} > 0.027$ 的解為_____。

6. 不等式 $(0.2)^{x^2-3x-2} > 0.04$ 之解為_____。

7. $18 \times 3^x + 7 > 3^{-x}$ 的解為_____。

8. 設 $a > 0$ 且 $a + a^{-1} = 6$ ，則下列何者正確？

(A) $a > 1$ (B) $|a - a^{-1}| = 4\sqrt{2}$ (C) $a^2 + a^{-2} = 34$ (D) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ (E) $a^3 + a^{-3} = 198$

9. 設 $a > 0$ ， $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，則 $\frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}}{a^2 + a^{-2} + 6} =$ _____。

10. 設 $a > 0$ ， $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 5$ ，則 $\frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 2}{a^2 + a^{-2} + 33}$ 的值為_____。

11. 已知 $a^{2x} = 5$ ，試求下列各式的值：

(1) $\frac{a^{4x} + a^{-4x}}{a^{2x} + a^{-2x}}$ 。

(2) $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 。

12. 解下列不等式：

(1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} < \left(\left(\frac{1}{5}\right)^x\right)^2$ ， x 的範圍為何？

(2) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$ ， x 的範圍為何？ (hint: 因式分解)

===== 挑戰區(13~17 題需要利用配方法) =====

13. 若 $-2 \leq x \leq 1$ ，求 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x+5}$ 的最小值為_____。

14. 若 $0 \leq x \leq 2$ ， $f(x) = 2^x - 4^{x-1}$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，試求數對 $(M, m) =$ _____。

15. 若 $-1 \leq x \leq 0$ ， $y = 2^{x+2} - 3 \times 4^x$ ，則 y 之最大值與最小值分別為 M 與 m ，
求數對 $(M, m) =$ _____。

16. 若 $a, b \in R$ ，且 $3a + 2b = 6$ ，則 $27^a + 9^b$ 的最小值為_____。

17. 設 x 為實數，若 $y = 4(3^x + 3^{-x}) + (9^x + 9^{-x}) - 5$ ，且 $t = 3^x + 3^{-x}$ ，試求：

(1) 將 y 以 t 之函數表示得 $y = ?$

(2) y 之最小值為？

18. 若 x 為實數，且 $(\sqrt{4 + \sqrt{15}})^x + (\sqrt{4 - \sqrt{15}})^x = 8$ ，則 x 之值為_____。

Ans: 1. $b < c = d < a$ 2. A 3. $d < c < b < e < a$ 4. D 5. $x < 3$ 6. $-1 < x < 4$ 7. $-2 < x$

8. BCDE 9. $\frac{18}{53}$ 10. $\frac{1}{5}$ 11. (1) $\frac{313}{65}$ (2) $\frac{21}{5}$ 12. (1) $x < 0$ 或 $2 < x$ (2) $0 < x < 1$ 13. $\frac{1}{256}$ 14. $(1, 0)$

15. $(\frac{4}{3}, 1)$ 16. 54 17. (1) $t^2 + 4t - 7$ (2) 5 18. ± 2

第 16 回 指數應用

1. 在一個培養細菌的容器中，細菌的數目每 1 分鐘就增為 3 倍。已知開頭放入 1 個細菌，1 小時後容器內細菌總數達到 N 個。如果開頭放入 27 個細菌，問最少經過多少時間，容器內細菌總數會達到 N 個？ (A)27 分鐘 (B)36 分鐘 (C)45 分鐘 (D)54 分鐘 (E)57 分鐘
2. 假設世界人口自 1980 年起，50 年內每年增加率均固定。已知 1987 年世界人口達 50 億，1999 年第 60 億人誕生在賽拉佛耶。根據這些資料推測 2023 年世界人口數最接近下列哪一個數？ (A)75 億 (B)80 億 (C)86 億 (D)92 億 (E)100 億
3. 某細菌的繁殖很穩定，每過一天，細菌數就會增為 a 倍。已知從正式實驗起 3 天後細菌數為 1500 個，5 天後為 37500 個，若 n 天後細菌數為 937500 個，則數對 $(a, n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 某種細菌在 x 天後的細菌數為 $f(x) = a \cdot b^{-x}$ ，其中 a 、 b 是常數。現已知 3 天後的細菌數為 2000 個，五天後的細菌數為 8000 個，試求：
(1) $b = ?$
(2) 最少幾天後細菌會數達到 80000 個？(答案為整數值)
(3) $\frac{f(t+3)}{f(t)} = ?$
5. 設甲、乙兩菌原有的數目相等，今實驗室發現甲、乙兩菌若混合在一起，每經過一日後，甲菌就增加 $\frac{1}{2}$ 倍，而乙菌增加 $\frac{1}{4}$ 倍，則第 日後，甲菌數目是乙菌的 1000 倍以上？(取至整數)

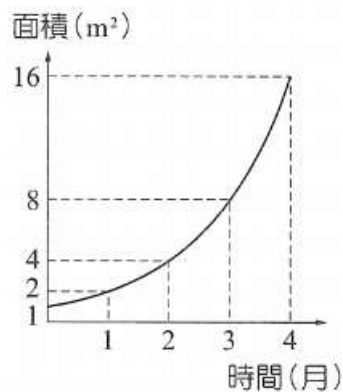
6. 某放射性物質重 160 克，若 18 年後剩下 20 克，則此放射性物質的半衰期為幾年？
(A)3 年 (B)6 年 (C)9 年 (D)12 年 (E)36 年
7. 小華上高中後，父親為他在銀行存入 100 萬元當就學基金，已知銀行的年利率是 4%，以一年為一期複利計算，經過幾年後此筆存款的本利和會超過 200 萬元_____。
($\log 1.04 \approx 0.0170$ ， $\log 1.48 \approx 0.17$ ， $\log 2 \approx 0.3010$)
8. 測驗理論上的羅序模式是說：能力 x 的學生作難度為 a 的試題，其答對率 $P(x) = \frac{2^{x-a}}{1 + 2^{x-a}}$ ，
某研究機構將一道難度為 a 的數學問題進行測驗，結果發現：能力 0.5 的學生答對率為 $\frac{1}{5}$ ，
試根據羅序模式求該道數學問題的難度 a 為何？
9. 以燈泡照射物體，設燈泡與被照明物的距離為 d (公尺)時，照明物表面的照度為 E (勒克斯)，
且 E 與 d 的關係式為 $E = 9 \times 10^3 \times d^{-\frac{3}{2}}$ 。若要求照度為 $\frac{8}{3}$ 勒克斯，則距離 d 應為_____公尺。

10. 右圖為某池塘中布袋蓮蔓延面積(y)與時間(x)的關係圖，
設其關係為指數函數 $y = k \cdot a^x$ ， k 是常數。

布袋蓮蔓延到 $3m^2$ 、 $5m^2$ 、 $225m^2$ 所需要的時間分別為 t_1 、 t_2 、 t_3 ，則：

(1) 數對 (k, a) 。

(2) 若 $\alpha t_1 + \beta t_2 = t_3$ ，求數對 (α, β) 。



11. 心理學家常用數學模式 $L(t) = a(1 - 10^{-bt})$ 來描述學生經過 t 時間後所得到的學習量，這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關，現有一學生一星期可以背熟 80 個英文單字，兩星期可以背熟 120 個英文單字，試問這個學生三星期可以背熟_____個英文單字。

Ans: 1. E 2. C 3. (5, 7) 4. (1) $\frac{1}{2}$ (2) 9 (3) 8 5. 38 6. B 7. 18 8. 2.5 9. 225

10. (1) (1, 2) (2) (2, 2) 11. 140

第 17 回 科學記號&常用對數

1. 若 $A = a \times 10^{19}$, $B = b \times 10^{41}$, 其中 $1 \leq a, b < 10$, 則 AB 的位數可能為

- (A) 60 (B) 61 (C) 62 (D) 63 (E) 64

2. 我們用 $\log b$ 表示方程式 $10^x = b$ 的解。例如 3 是 $10^x = 1000$ 的解，所以 $\log 1000 = 3$ 。

其它像是 $\log 1 = 0$ 、 $\log \frac{1}{100} = -2$ 等等。求下列各對數之值：

(1) $\log 100\sqrt{10} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\log \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[5]{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $\log 10^{9527} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $10^{\log 10} = \underline{\hspace{2cm}}$ (5) $10^{\log 10\sqrt{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (6) $\sqrt{10}^{\log \frac{49}{36}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(7) $10^{\log(\pi+\sqrt{3})} = \underline{\hspace{2cm}}$ (8) $10^{\log(\log 100)} = \underline{\hspace{2cm}}$ (9) $\log 0 = \underline{\hspace{2cm}}$

(10) $\log(-7) = \underline{\hspace{2cm}}$ (11) $\log(-10^5)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 若 $\log A = 8$ 、 $\log B = \sqrt{5}$, 則

(1) $\log AB = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\log \frac{A}{B} = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $\log A^{99} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 若 $\log A = m$ 、 $\log B = n$, 則

(1) $\log AB = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\log \frac{A}{B} = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $\log A^{99} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\log 10A = \underline{\hspace{2cm}}$ (5) $\log \frac{A}{100} = \underline{\hspace{2cm}}$ (6) $\log A^{\pi+2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(7) $\log \frac{\sqrt{A}^{19}}{10B^7} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 令 $a = 2$, $b = 1 + \log 14$, $c = \log 199$, 則此三數的大小關係為_____。

6. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ ，則

(1) $\log 9.6 \approx$ _____

(2) 6^{100} 是 _____ 位數，且最高位數為 _____。

(3) 6^{-100} 的10進位表示法中，自小數點後第_____位開始不為0，且此不為0的數字為 _____。

7. 令正整數 b 有31位數，且 $n \leq \log b < n + 1$

(1) 若 n 是整數，則 $n =$ _____ (2) $\sqrt{b}$ 是 _____ 位數 (3) b^3 可能是幾位數?

8. (1) $\log 4 + \log 25 =$ _____

(2) 若 $\log 2 + \log 3 + \log 7 = \log k$ ，求 $k =$ _____

(3) 若 $5 \log 3 - 2 \log 12 = \log k$ ，求 $k =$ _____

(4) $\log 1 \cdot \log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 4 \cdot \log 5 \cdot \log 6 \cdot \log 7 \cdots \cdots \log 998 \cdot \log 999 =$ _____

(5) $\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4} + \cdots + \log \frac{999}{998} + \log \frac{1000}{999} =$ _____

9. $\left(\frac{3}{5}\right)^{60}$ 化為小數後，則

(1) 在小數點後第 _____ 位開始出現不為0的數字

(2) 在小數點後有 _____ 位數字

10. 若 $2^{38} + 3^{25}$ 為 M 位數，且最高位為 N ，個位數是 K ，則：

(1) M 值為何？ (2) N 值為何？ (3) K 值為何？

(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$)

11. 若 $(\log a)(\log b) + \log a - \log b^2 = 2$ 且 $a > 100$ ，則 $b =$ _____。

12. 設 $\log\left(1 + \frac{1}{7}\right) = a$ ， $\log\left(1 + \frac{1}{49}\right) = b$ ，試用 a, b 表示 $\log 2$ 和 $\log 7$

Ans: 1. BC 2. (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{2}{15}$ (3) 9527 (4) 10 (5) $10\sqrt{10}$ (6) $\frac{7}{6}$ (7) $\pi + \sqrt{3}$ (8) 2 (9) 無意義

(10) 無意義 (11) 20 3. (1) $8 + \sqrt{5}$ (2) $8 - \sqrt{5}$ (3) 792 4. (1) $m + n$ (2) $m - n$ (3) $99m$

(4) $1 + m$ (5) $m - 2$ (6) $(\pi + 2)m$ (7) $\frac{19}{2}m - 7n - 1$ 5. $a < b < c$ 6. (1) 0.9821 (2) 78, 6

(3) 78, 1 7. (1) 30 (2) 16 (3) 91, 92, 93 8. (1) 2 (2) 42 (3) $\frac{27}{16}$ (4) 0 (5) 3 9. (1) 14 (2) 60

10. (1) $M = 13$ (2) $N = 1$ (3) $K = 7$ 11. $\frac{1}{10}$ 13. $\log 2 = \frac{2a-b+2}{7}$, $\log 7 = \frac{6-a-3b}{7}$

第 18 回 對數應用

1. 於今年初存入銀行 100 萬元，年利率為 8%，一年為一期，複利計算，則至少需_____年，本利和可以超過 300 萬元。 $(\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771)$
2. J 島國 311 核災造成輻射感染時，其感染速度的數學模式為 $N \approx 200(1 + 100^{0.03x})$ ，其中自然數 N 表示受感染人數，自然數 x 表示災後天數。已知近似值 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， $\log 7 = 0.8451$ ，請估算災後至少_____天會有一萬人以上受到輻射感染。
3. 目前國際使用芮氏規模來表示地震強度。設 $E(r)$ 為地震芮氏規模 r 時，震央所釋放出來的能量， r 與 $E(r)$ 的關係如下： $\log E(r) = 5.24 + 1.44r$
 - (1) 某次地震其芮氏規模為 4，試問其震央所釋放的能量 $E(4)$ 為多少？
 - (2) 試問芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放的能量是芮氏規模 4 的地震震央所釋放能量之多少倍？(整數倍以下捨去，已知 $10^{1.44} = 27.54$)

4. 國際氣象組織採用 Beaufort scale 風力分級法，分級公式為

$$V = 0.8 \cdot B^{\frac{3}{2}}, \text{ 其中 } V \text{ 是風速(公尺/秒), } B \text{ 是風級}$$

今有一颶風測得其風速為 25.3 公尺/秒。問此颶風的風級最接近下列哪一個選項？

($\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 7 = 0.8451$, $\log 11 \approx 1.0414$)

(A)8 級 (B)9 級 (C)10 級 (D)11 級 (E)12 級

5. 天文學以織女星的亮度 I_0 為標準，被觀察的星星亮度為 I ，將其星等定義為 $m = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ 。已知天狼

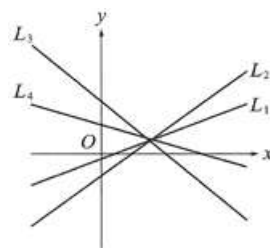
星為 -1.4 等星，而另一顆恆星 M 的亮度為天狼星的 $\frac{1}{100}$ ，試求恆星 M 的星等為_____。

6. (1) 一放射性物質半衰期為 20 年，問至少需經過 _____ 年，該物質質量才會剩下不到 10% (以整數回答)
(2) 另一放射性物質不知其半衰期，只知 3 年前其質量為 100 克，現在是 90 克。問至少在過 _____ 年，其質量才會剩不到 20 克。

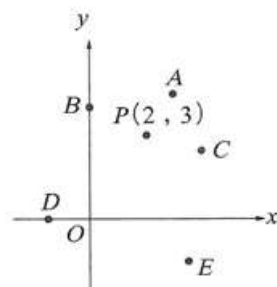
Ans: 1. 15 2. 29 3. (1) 10^{11} (2) 758 4. C 5. 3.6 6. (1) 67 (2) 43

第 19 回 斜率

1. 右圖中 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 分別表 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 之斜率，
下列何者為真？ (A) $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$ (B) $m_4 < m_3 < m_2 < m_1$
(C) $m_4 < m_3 < m_1 < m_2$ (D) $m_3 < m_4 < m_1 < m_2$ (E) $m_2 < m_1 < m_4 < m_3$



2. 設 m 為實數，且 P 點坐標為 $(2, 3)$ ；
則在下圖中哪一點的坐標代入 $y - 3 = m(x - 2)$ ，會使得 m 值為最小？
(A) A 點 (B) B 點 (C) C 點 (D) D 點 (E) E 點



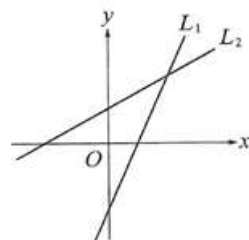
3. 設一次函數 $f(x) = ax + b$ ，若 x 值減少 2 單位時，其 $f(x)$ 值增加 4 單位，則 a 之值為_____。

4. 設 $f(x) = \frac{5}{3}x - 2^{10}$ ，求 $\frac{f(1911) - f(2010)}{2010 - 1911}$ 之值為_____。

5. 一次多項式 $f(x) = ax + b$ ，若 $\frac{f(2014) - f(1911)}{103} = 4$ ，且 $y = f(x)$ 與 y 軸交於 $(0, -7)$ ，
則 $a + b = ?$ (A) -7 (B) -6 (C) -5 (D) -4 (E) -3

6. 兩直線 L_1 、 L_2 之方程式分別為 $L_1: ax + y + b = 0$ ， $L_2: cx + y + d = 0$ ，
如下圖所示，試問下列哪些選項是正確的？

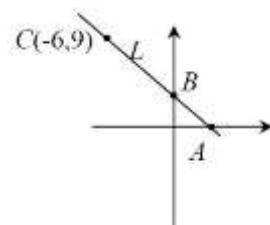
(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c < 0$ (D) $d > 0$ (E) $a < c$



7. 平面上三點 $A(1, 3)$ 、 $B(5, 6)$ 、 C ，若 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$ ，且直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的斜率為 -3 ，
則 C 點坐標為_____。(二解)

8. 如圖所示直線 L 分別與 x 軸、 y 軸交於 A 、 B 。

已知 $C(-6, 9)$ 在 L 上，且 $\overline{AC} = 3\overline{AB}$ ，求直線 L 的斜率為_____。



9. 若兩直線 $kx + 3y - 1 = 0$ 與 $2x + y + 2 = 0$ 互相垂直，則 $k =$ _____。

10. $A(a, 1)$ ， $B(2, -3)$ ， $C(1, 2)$ 為平面上三點，若 A 、 B 、 C 三點共線，求 a 之值為 _____。

11. 下列哪一條直線的斜率最小？ (A) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ (B) $y - 3 = 7\left(x + \frac{1}{2}\right)$

(C) $240x + 100y + 30 = 0$ (D) $2x + 5y + 1 = 0$ (E) $3x - \frac{2}{3}y + 5 = 0$

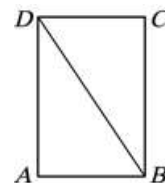
===== 挑戰區 =====

12. 已知 $f(x)$ 為一線型函數且滿足 $f(5) \geq f(6)$ ， $f(7) \leq f(8)$ ， $f(9) = 10$ ，則 $f(x) =$ _____。

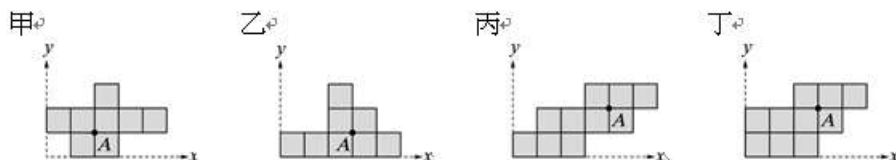


13. 如右圖， $ABCD$ 為矩形，其中 $\overline{AB}$ 垂直 y 軸，

且 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 6$ 。若 $y = f(x)$ 的圖形為 $\overrightarrow{BD}$ ，求 $f(11) - f(29) =$ _____。



14. 若有一長方形的四個邊和兩條對角線，分別位於斜率為 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 、 m_5 、 m_6 的直線上，已知 $m_1 > m_2 = m_3 > m_4 > m_5 = m_6$ ，請問下列選項何者正確？
 (A) $m_4 > 0$ (B) $m_5 < 0$ (C) $m_1 m_4 = -1$ (D) $m_3 m_5 = -1$ (E) $m_2 m_6 = -1$
15. 由三直線 $L_1: 101x + 100y - 500 = 0$ ， $L_2: 101x - 100y + 600 = 0$ ， $L_3: y + 2 = 0$ 所圍出的三角形形狀可能是？
 (A) 銳角三角形 (B) 直角三角形 (C) 鈍角三角形 (D) 正三角形 (E) 等腰三角形
16. 下列各圖均是由一些 1×1 的正方形所組成，若在各圖中畫一條通過 A 點的直線使分割的兩邊面積相等，則在那一個圖中的直線，其斜率最大？ (A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁 (E) 斜率皆相同



Ans: 1. D 2. E 3. -2 4. $-\frac{5}{3}$ 5. E 6. BCE 7. $(5 - \sqrt{10}, 6 + 3\sqrt{10})$ 或 $(5 + \sqrt{10}, 6 - 3\sqrt{10})$

8. -1 9. $-\frac{3}{2}$ 10. $\frac{6}{5}$ 11. C 12. 10 13. 27 14. BDE 15. AE 16. A

第 20 回 直線方程式

1. 設直線 L 通過 $A(2, -1)$ 與 $B(0, 5)$ 兩點，求 L 的方程式為 _____。
2. 設 L 為斜率 $-\frac{2}{3}$ 的直線方程式，且 x 截距為 -3 ，若 L 的方程式為 $cx + dy = -6$ ，則 $c + d =$ _____。
3. 已知直線 $L: x - 2y = 5$ ，求與 L 平行且 x 截距為 3 的直線方程式為 _____。
4. 若 $A(6, -8)$ 與 $B(0, 8)$ 為平面上兩點，求 $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式為 _____。
5. 設直線 L 的方程式為 $y = \frac{8}{15}x + k$ ， $k < 0$ ，若直線 L 與 x 軸、 y 軸各交於 A 、 B 兩點，且 $\overline{AB}$ 長度為 17 ，則實數 k 的值為 _____。
6. 求通過點 $(2, 3)$ ，且兩軸截距相等的直線方程式為 _____。

7. 直線 $L: ax+by=1$ 過點 $(2, 5)$ ， x 截距的絕對值為 y 截距絕對值的 2 倍，且 L 不通過第三象限，則 $a+b$ 之值為_____。
8. 對任意實數 m ，直線 $L: y = mx + 4m - 3$ 恆通過哪一定點？
 (A) $(4, 3)$ (B) $(-4, 3)$ (C) $(4, -3)$ (D) $(-3, -4)$ (E) $(-4, -3)$
9. 已知 m 為直線方程式 $L: mx - y + 5m = 3$ 之斜率，求下列何點必定在 L 上？
 (A) $(0, 3)$ (B) $(5, 3)$ (C) $(-5, -3)$ (D) $(0, -3)$ (E) $(5, -3)$
10. 已知點 $A(7, 1)$ ， $B(2, 11)$ ，若直線 $y = m(x-2) + 7$ 與 $\overline{AB}$ 交於 P 點，且 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{4}{1}$ ，則 m 的值=_____。
11. 一光線自點 A 射向 x 軸上點 $C(4, 0)$ ，經 x 軸反射後恰通過點 $B(5, 2)$ ，則點 A 所在的直線方程式為 $ax+by=8$ ，則 $(a, b) =$ _____。

Ans: 1. $3x + y = 5$ 2. 5 3. $x - 2y = 3$ 4. $3x - 8y - 9 = 0$ 5. -8 6. $3x - 2y = 0$ 或 $x + y = 5$

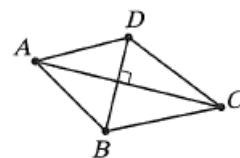
7. $\frac{1}{4}$ 8. E 9. C 10. 2 11. $(2, 1)$

第 21 回 直線之圖形問題(平行、垂直、面積)

1. 若兩直線 $L_1: x + ay + (a - 3) = 0$ ， $L_2: ax + (a + 2)y - 2 = 0$ 平行，則實數 a 的值為 _____。
2. 設直線 $L_1: (5 - 3m)x + (m - 1)y = 10$ ， $L_2: (2m - 1)x - 3y = 19$ ， m 為實數，且 $L_1 \parallel L_2$ ，求 m 之值為 _____。
3. 已知平面上三點 $A(5, 2)$ 、 $B(1, -2)$ 、 $C(1, -4)$ ，則過 B 點且將 $\triangle ABC$ 的面積等分的直線斜率為 _____。
4. 已知 $A(3, 2)$ 、 $B(1, -2)$ 、 $C(1, -4)$ ，求過 B 點且將 $\triangle ABC$ 的面積等分的直線方程式為 _____。
5. 兩直線 $ax + 4y - 2 = 0$ 與 $2x - 5y + b = 0$ 互相垂直於點 $P(1, c)$ ，則 $a + b + c =$ _____。
6. 關於直線 $L: -3x + 4y = 12$ ，試問下列敘述哪些正確？
(A) 直線 L 的圖形不通過第四象限
(B) L 的斜率為 $-\frac{3}{4}$ (C) x 截距為 -3 (D) y 截距為 3 (E) 與兩軸所圍三角形的面積為 12

7. 一直線 M 過兩直線 $2x + y + 5 = 0$ 與 $x + 2y + 4 = 0$ 的交點且與直線 $L: 3x + 4y + 30 = 0$ 互相垂直，則此直線 M 的方程式為 _____。

8. 四邊形 $ABCD$ 中，兩對角線 $\overline{AC}$ ， $\overline{BD}$ 互相垂直，且 $\overline{DA} = \overline{DB}$ 。
已知 $A(3, 2)$ 、 $B(6, -1)$ 、 $C(11, 0)$ ，求 D 點的座標為 _____。



9. 兩直線 $L_1: (m + 2)x + (m + 3)y = 10$ ， $L_2: 6x + (2m - 1)y = 5$ ，則：

- (1) 若 $L_1 \perp L_2$ ，則 m 之值為何? (兩解)
(2) 若 $L_1 \parallel L_2$ ，則 m 之值為何? (兩解)

10. 在座標平面上，已知兩點 $A(1, 2)$ 、 $B(3, 1)$ ，直線 $L: y = m(x + 1)$ ，若 L 與線段 $\overline{AB}$ 相交，則 m 的範圍為 _____。

11. 設直線 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 通過 $(3, 4)$ ，且在第四象限與兩軸圍成的三角形面積為1，試求數對 $(a, b) =$ _____。

12. 一直線通過 $(-4, 1)$ 且跟兩軸所圍成之三角形面積為1，則此直線之方程式為 _____。

13. 直線 L 過 $(-3, 4)$ 且與兩軸在第二象限圍成一個三角形，求此三角形面積最小值為 _____。

14. 直線 L 過點 $(1, 3)$ 且與座標軸所截的截距絕對值相同，則：

(A) 滿足此條件的直線 L 有兩條 (B) L 最大的斜率為3 (C) L 最小的斜率為 -1

(D) 若 L 的斜率大於0，則 L 與座標軸所圍成的面積為2

(E) 若 L 的斜率小於0，則 L 與座標軸所圍成的面積為8

Ans: 1. -1 2. 2 或 4 3. $\frac{1}{2}$ 4. $x - y = 3$ 5. -4 6. AD 7. $4x - 3y + 5 = 0$ 8. $(7, 3)$

9. (1) $-\frac{9}{2}$ 或 -1 (2) $-\frac{5}{2}$ 或4 10. $\frac{1}{4} \leq m \leq 1$ 11. $(1, -2)$ 12. $x + 8y = 4$ 或 $x + 2y = -2$ 13. 24

14. BCE

第 22 回 直線之圖形問題(對稱、綜合)

1. 平行四邊形 $ABCD$ ，已知 $A(-3, -2)$ 、 $B(1, -1)$ 、 $C(4, 5)$ ，則第四頂點 D 之座標為 _____。
2. 有一農夫從住家 $A(-5, 4)$ 處，牽著一隻牛到河邊(x 軸) P 處喝水，然後再牽往田裡 $B(7, 1)$ 處工作，則當 P 點的座標為 _____ 時，農夫所走的路徑 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 為最短。
3. 若三直線 $L_1: x + 3y - 1 = 0$ 、 $L_2: x - y + 3 = 0$ 與 $L_3: 2x + ky + 1 = 0$ 不能圍成一個三角形，則 k 的值可能為何？
4. 自平面上一點 $A(2, 1)$ 射向 y 軸，經點 $B(0, 5)$ 反射後，下列哪一點為反射後經過的座標？
(A) (50, 105) (B) (51, 106) (C) (52, 107) (D) (53, 108) (E) (54, 109)
5. 正方形 $ABCD$ 以 $A(1, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(2, 1)$ 、 $D(1, 1)$ 為四頂點，若直線 $y = mx + 2m + 3$ 與正方形 $ABCD$ 有相交，則實數 m 之範圍為 _____。

6. 關於直線 $L: 3x - 4y = 10$ 的敘述，選出正確的選項：
- (A) 直線 L 圖形不通過第二象限 (B) 直線 L 與坐標平面之兩軸所圍三角形的面積為 12
- (C) 直線 L 的斜率為 $\frac{3}{4}$ (D) 直線 $y = -\frac{4}{3}x + 10$ 與直線 L 互相垂直
- (E) 若 m 為任意實數，則直線 $(3+2m)x + (2m-4)y = 2m+10$ 必恆通過點 $(2, -1)$

7. 已知點 $A(-4, 3)$ ，直線 $L: x - 2y + 5 = 0$ ，則：
- (1) 點 A 對直線 L 的對稱點座標為何？
- (2) 平行直線 L 且與兩軸所圍成的三角形面積為 9 的直線方程式為何？

===== 挑戰區 =====

8. 設不共點的三直線之方程式分別為 $ax - 4y = 1$ ， $(a+1)x + 3y = 2$ ， $x - 2y = 3$ ，其中 a 為實數，試問 a 為何值時，上述三直線會圍出一個直角三角形？ (A) -8 (B) -4 (C) 1 (D) 3 (E) 5

9. $\triangle ABC$ 中，過 B 的高之方程式為 $5x - 10y + 2 = 0$ ，過 A 的角平分線為 $x + y = 0$ ，又 $C(0, 2)$ ，則 B 坐標為_____。
10. 平面上， $A(-4, 3)$ 、 $B(2, 1)$ 、直線 $L: x - y + 1 = 0$ ，又 P 為 L 上之動點。請問 $\overline{PB} - \overline{PA}$ 會有最大值還是有最小值？又該值為何？

Ans: 1. $(0, 4)$ 2. $(\frac{23}{5}, 0)$ 3. $-2, 3, 6$ 4. A 5. $-1 \leq m \leq -\frac{1}{2}$ 6. $ACDE$

7. (1) $(-2, -1)$ (2) $x - 2y = \pm 6$ 8. $ABDE$ 9. $(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5})$ 10. 有最小值 -4

第 23 回 點到直線距離、平行線距離、角平分線

1. 求點 $P(2, -1)$ 至直線 $3x + 2y = 6$ 的距離?

- (A) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ (B) $\frac{4\sqrt{13}}{13}$ (C) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (E) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

2. 請問有幾個 k 值滿足點 $(-4, -3)$ 到直線 $24x + 7y + k = 0$ 的距離為 5?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 無限多

3. 若直線 $3x + 4y = 8$ 垂直且平分線段 $\overline{AB}$ ，又 A 點坐標為 $(1, 1)$ ，則線段 $\overline{AB}$ 的長度為 _____。

4. 平面上一直線 L 過點 $A(2, 3)$ ，且原點到 L 之距離為 $\sqrt{13}$ ，求 L 之方程式為 _____。

5. 已知 x, y 為實數，若 $x - y + 1 = 0$ ，則 $\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 5)^2}$ 之最小值為 _____。

6. 設 $P(-2, -3)$ 為平面上一點，下列直線何者距離 P 最近？

- (A) $x = 5$ (B) $y = 2$ (C) $3x - 4y + 14 = 0$ (D) $x + y = 20$ (E) $x - \sqrt{3}y + 7 = 0$

7. 與 $3x - 4y + 1 = 0$ 平行且相距6之直線方程式為 $3x - 4y + m = 0$ 和 $3x - 4y + n = 0$ ，則 $m + n =$ _____。

8. 兩直線 $\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$ 之距離為 $\frac{k\sqrt{5}}{10}$ ，則 $k =$ _____。

9. 求過 $(4, 5)$ 而與兩直線 $3x - 4y = 7$ ， $12x - 5y = -6$ 夾等角之直線方程式為 _____。(有兩解)

10. 已知兩直線 $L_1: 2x - y + 1 = 0$ ， $L_2: x - 2y + 5 = 0$ ，則此兩直線之銳交角平分線方程式為_____。

11. 求 $L_1: x + y - 3 = 0$ 與 $L_2: 7x + y - 4 = 0$ 之鈍夾角平分線方程式為 _____。

===== 挑戰區 =====

12. 設直線 L 與兩平行直線 $L_1: 3x + 4y + 8 = 0$ 、 $L_2: 6x + 8y - 4 = 0$ 分別交於 A 、 B 兩點，
若 L 與 L_1 之一夾角為 30° ，則 $\overline{AB} =$ _____。

Ans: 1. A 2. C 3. $\frac{2}{5}$ 4. $2x + 3y = 13$ 5. $\sqrt{2}$ 6. C 7. 2 8. 11

9. $7x + 9y - 73 = 0$ 或 $9x - 7y - 1 = 0$ 10. $x - y + 2 = 0$ 11. $2x - 4y + 11 = 0$ 12. 4

第 24 回 重心、內心、外心、垂心

1. 已知 $A(0,0)$ 、 $B(14,0)$ 、 $C(9,12)$ ：
 - (1) 分別求 $\triangle ABC$ 之重心、內心、外心、垂心座標。
 - (2) 承上，重心、外心、垂心是否可圍成一三角形？

2. 給定一三角形 $\triangle ABC$ 。若直線 L_1 過 A 且平行 $\overline{BC}$ 、直線 L_2 過 B 且平行 $\overline{AC}$ 、直線 L_3 過 C 且平行 $\overline{AB}$ ，且 L_1 、 L_2 交於 R ， L_2 、 L_3 交於 P ， L_3 、 L_1 交於 Q 。則 $\triangle ABC$ 的垂心是 $\triangle PQR$ 的 _____。
(A) 重心 (B) 內心 (C) 外心 (D) 垂心 (E) 以上皆非

3. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(-4,3)$ 、 $B(2,1)$ ，另外有一點 $P(-1,3)$ ：
 - (1) P 可能是 $\triangle ABC$ 的外心嗎？
 - (2) 若 P 為 $\triangle ABC$ 的內心，則 $\angle A$ 的角平分線方程式為 _____。
 - (3) 若 P 為 $\triangle ABC$ 的重心，則 C 的座標為 _____。
 - (4) 若 P 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則 C 的座標為 _____。

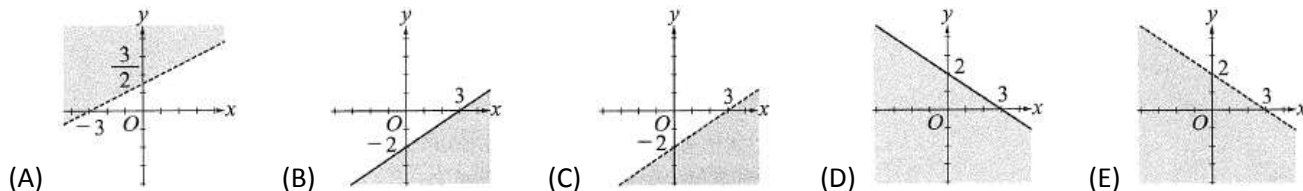
4. 已知一三角形的三中線長分別為9、12、15，則此三角形面積為 _____。
5. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(4, 5)$ 、及過 B 之中線方程式 $x - 2y + 1 = 0$ 、過 C 之中線方程式 $2x + y - 8 = 0$ ，則 C 的座標為 _____。
6. 已知 $\triangle ABC$ 的一個頂點 $A(0, 3)$ ，且 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線所在的直線方程式分別為 $y = 1$ 、 $x - y = 0$ ，則直線 BC 之斜率為 _____。

Ans: 1. (1) 重心 $\left(\frac{23}{3}, 4\right)$ 、內心 $(8, 4)$ 、外心 $\left(7, \frac{33}{8}\right)$ 、垂心 $\left(9, \frac{15}{4}\right)$ (2) 不可 2. C

3. (1) 不可能 (2) $y = 3$ (3) $(-1, 5)$ (4) $(2, 12)$ 4. 72 5. $(4, 0)$ 6. $\frac{1}{3}$

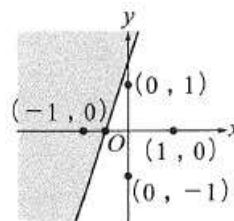
第 25 回 二元一次不等式

1. 請問下列哪一個選項為二元一次不等式 $x - 2y + 3 < 0$ 的圖形？

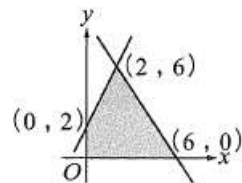


2. 右圖是二元一次不等式 $ax + by + c \geq 0$ 的圖解，則下列哪些選項是正確的？

(A) $a < 0$ (B) $b > 0$ (C) $c < 0$ (D) $a - c < 0$ (E) $a + b > 0$

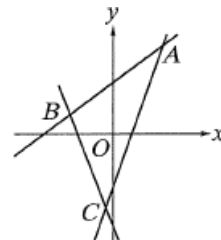


3. 已知聯立不等式
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ ax - y + 2 \geq 0 \\ 3x + by - 18 \leq 0 \end{cases}$$
 的圖形如右，則 $a + b =$ _____。

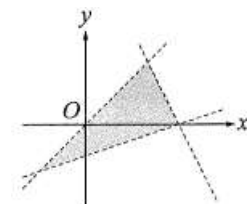


4. 如右圖所示， $\triangle ABC$ 是由三直線 $L_1: x - 2y + 4 = 0$ ， $L_2: 2x - y - 2 = 0$ ， $L_3: 2x + y + 4 = 0$ 所圍成，則此三角形區域(含邊界)可用下列哪一組聯立不等式表示？

- (A) $\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \\ 2x + y + 4 \leq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \\ 2x + y + 4 \geq 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x - 2y + 4 \leq 0 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \\ 2x + y + 4 \geq 0 \end{cases}$
- (D) $\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \\ 2x + y + 4 \leq 0 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} x - 2y + 4 \leq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \\ 2x + y + 4 \geq 0 \end{cases}$



5. 右圖的灰色部分可用下列哪一組不等式表示? (A) $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y < 3 \\ 2x + y > 6 \end{cases}$

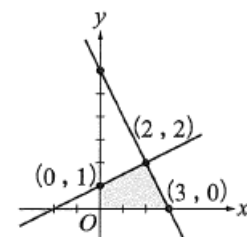


- (B) $\begin{cases} x - y < 0 \\ x - 3y < 3 \\ 2x + y < 6 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y > 3 \\ 2x + y < 6 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y < 3 \\ 2x + y < 6 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y > 3 \\ 2x + y < 6 \end{cases}$

6. 座標平面上，若不等式組 $\begin{cases} x - y \geq -5 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq a \end{cases}$ 表示的區域為一個三角形及其內部，

則 a 不可能 為下列哪個選項? (A) 5 (B) $\frac{11}{2}$ (C) 6 (D) $\frac{13}{2}$ (E) 7

7. 已知聯立不等式 $\begin{cases} x + ay + 2 \geq 0 \\ bx + y - 6 \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 的圖形如右，求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



8. 平面上一直線 $L: 2x + 2y - 3 = 0$ 將平面分成兩側，已知一點 $P(0, 3)$ ，試問下列哪些點與 P 點在直線 L 的同側?

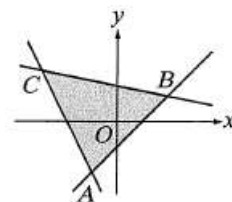
- (A) (1, 5) (B) (-1, 2) (C) $(1, \sqrt{2})$ (D) $(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5})$ (E) (4, -3)

9. 下列哪一點與點 $(2, -1)$ 分別在直線 $L: 3x - 2y + 7 = 0$ 之異側?

(A) $(0, 4)$ (A) $(-1, 3)$ (A) $(-2, 1)$ (A) $(3, 1)$ (A) $(4, 5)$

10. 在座標平面上，試求滿足不等式組 $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 45, 5x + 2y \leq 180$ 所圍區域的面積為 _____。

11. 右圖之三角形，其三邊之直線方程式各為 $x + 5y - 7 = 0, 2x + y + 4 = 0, x - y - 1 = 0$ ，若點 $P(k, -k)$ 在三角形 ABC 內部區域(含邊界)，則 k 的範圍為 _____。



Ans: 1. A 2. ABCD 3. 4 4. B 5. D 6. E 7. $(-2, 2)$ 8. ACD 9. ABC 10. 945

11. $-\frac{7}{4} \leq k \leq \frac{1}{2}$

第 26 回 圓之定義、標準式、一般式

1. 圓心在點 $(-3, 2)$ ，半徑為6之圓方程式為 _____。
2. 設圓 C 通過點 $A(1, 1)$ ，且與另一圓 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 有相同的圓心，則圓 C 的方程式為 _____。
3. 已知圓 $C: (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 5$ ，求一圓 D 之圓心與圓 C 相同，且面積為圓 C 的3倍之圓方程式為 _____。
4. 下列哪些條件恰可決定一圓？ (A) 過三點 $(1, 2)$ 、 $(3, 6)$ 、 $(-5, -10)$ (B) 以 $(5, 0)$ 、 $(0, 10)$ 為直徑兩端點
(C) $x^2 + 2y^2 + 4x + 8y + 10 = 0$ (D) $(x - 5)^2 + (y + 10)^2 = -5$ (E) $x^2 + y^2 - 3x - 7y - 70 = 0$
5. 考慮方程式 $x^2 + y^2 - 2x + ky + 2k - 2 = 0$ 的圖形：
(1) 若圖形不存在，則 k 的範圍為何？
(2) 若圖形為一點，則此點的座標為何？
6. 若方程式 $x^2 + y^2 - 2x - 2ky + 2k^2 - k - 5 = 0$ ， k 為實數，則下列就 k 的值的敘述何者正確？
(A) 當 $-2 < k < 3$ 時，此方程式的圖形表一圓 (B) 當 $k < -2$ 或 $k > 3$ 時，此方程式的圖形表一圓
(C) 當 $k = -2$ 或 3 時，此方程式的圖形表一點 (D) 當 $-2 < k < 3$ 時，此方程式的圖形不存在
(E) 當 $k < -2$ 或 $k > 3$ 時，此方程式的圖形不存在

7. 實數 x 與 y 滿足方程式 $x^2 + y^2 = 4x - 6y - 13$ ，則 $x + y = ?$

- (A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 0 (E) 1

8. 一圓通過 $A(1, 0)$ ， $B(3, 2)$ 兩點且圓心在直線 $3x - y = 1$ 上，則圓方程式(標準式)為 _____。

9. 通過 $(0, 0)$ ， $(4, 0)$ ， $(0, -6)$ 三點之圓的方程式為 _____。

10. 若 $(6, 2)$ 、 $(4, 6)$ 、 $(-3, 5)$ 、 $(k, -3)$ 四點在同一圓上，試求 k 的值為 _____。

===== 挑戰區 =====

11. 設 P 點在圓 $C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 上移動，原點 O 在線段 $\overline{PQ}$ 上，且 $\overline{OP} \times \overline{OQ} = 6$ ，求點 Q 的軌跡方程式為_____。

Ans : 1. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 36$ 2. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 3. $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 15$ 4. BE

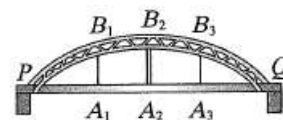
5. (1) $2 < k < 6$ (2) $(1, -1)$ 或 $(1, -3)$ 6. ACE 7. C 8. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

9. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ 10. 1 11. $x^2 + y^2 + 3x + 2y + 3 = 0$

第 27 回 圓方程式與距離概念的綜合應用

1. 在座標平面上，以 $(1, 1)$ 、 $(-1, 1)$ 、 $(-1, -1)$ 及 $(1, -1)$ 等四個點為頂點的正方形，與圓 $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ 有幾個交點？ (A) 0個 (B) 1個 (C) 2個 (D) 3個 (E) 4個
2. 設 $A(-1, 2)$ 、 $B(3, 4)$ ，若以 $\overline{AB}$ 為直徑之圓方程式為 $(x + a)^2 + (y + b)^2 = c$ ，試求 $a + b + c =$ _____。
3. 關於圓 $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ ，下列何者正確？
(A) 圓心 $(3, 0)$ (B) 半徑為3 (C) 點 $(0, 0)$ 在圓內 (D) 點 $(2, 3)$ 在圓上 (E) 點 $(3, 2)$ 在圓上
4. 設 $x^2 + y^2 - 4x + ky + 5 = 0$ 之圖形為一圓 C ，且點 $(k, k - 3)$ 在圓之外部，則實數 k 之範圍為 _____。
5. 設 O 為原點，若 P 是圓 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$ 上的動點，則 $\overline{OP}$ 的最大值為何？
(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14
6. 已知 (a, b) 為圓 $C: x^2 + y^2 - 14x + 8y - 16 = 0$ 上一點，求 $\sqrt{(a + 5)^2 + (b - 1)^2}$ 之最大值為何？
(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24

7. 若方程式 $x^2 + y^2 + 2mx - 2my + (3m^2 - 2) = 0$ 的圖形表一圓，則：
- (1) m 的範圍為何？
 - (2) 此圓的最大面積為何？
8. 求圓心在 y 軸上，且通過 $A(-4, 2)$ 與 $B(-3, -5)$ 的圓方程式為 _____。
9. 設三角形的三頂點是 $A(1, -1)$ 、 $B(0, 2)$ 、 $C(2, -2)$ ，求這三角形外接圓的圓心座標為何？
10. 試求與圓 $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$ 互相垂直的兩切線之交點的軌跡方程式為 _____。
11. 設 $A(2, -6)$ ， $B(6, 10)$ 為圓 C 上一弦之兩端點，此弦距離圓心的長為 $2\sqrt{17}$ ，求圓 C 的方程式。
12. 橋面上有一圓拱形建築，圓拱的寬度 $\overline{PQ} = 40$ 公尺，拱高 $\overline{A_2B_2} = 10$ 公尺 (如右圖)，在距橋面中心 A_2 的左右 15 公尺處各有一纜繩垂直橋面，求纜繩 $\overline{A_3B_3}$ 的長為 _____。



Ans : 1. C 2. 1 3. AE 4. $k < -2$ 或 $\frac{7}{3} < k$ 5. B 6. D 7. (1) $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ (2) 2π

8. $x^2 + (y + 1)^2 = 25$ 9. $(5, 2)$ 10. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 18$

11. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 136$ 或 $(x - 12)^2 + y^2 = 136$ 12. 5

第 28 回 圓與直線的圖形關係

1. 圓 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ ，求通過圓 C 之圓心且斜率為 -2 的直線方程式為 _____。
2. 若圓 C 的圓心在直線 $x + y = 1$ 上，且過 $A(3, 5)$ ， $B(-1, 7)$ 兩點，則：
 - (1) 弦 $\overline{AB}$ 的中垂線方程式為何？
 - (2) 圓 C 的方程式為何？
3. 若過點 $A(4, 1)$ ， $B(2, -1)$ ，且圓心在直線 $x + 2y - 2 = 0$ 上之圓方程式為 $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ， $r > 0$ ，則 $h + k + r =$ _____。
4. 有一條直線通過點 $P(1, 6)$ ，且將圓 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ 的面積兩等分，求此直線方程式為 _____。
5. 座標平面上圓 $C: (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ，已知圓外一點 $P(7, -2)$ ，則圓 C 上共有 _____ 個點與點 P 的距離恰為整數值。

6. 設直線 $L: y = mx - 1$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 有兩相異交點，則 m 的範圍為_____。

7. 若直線 $L: x - 2y + k = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ 交於兩點，則 k 之範圍為_____。

8. 設圓 C 之圓心坐標為 (a, b) (其中 $b > 0$) 且過 $P(3, -3)$ 、 $Q(7, 5)$ 兩點。
若圓 C 將 y 軸截出一線段長為8，則圓 C 之半徑為_____。

9. 用刀子將甜甜圈切成英文字母 C (如右圖)，已知 A 、 B 、 C 、 D 在同一條線上，
且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ ，甜甜圈外圈圓半徑為4，內圈圓半徑為2，兩圓為同心圓，
則 $\overline{AB} =$ _____。



===== 挑戰區 =====

10. 設圓 $C: x^2 + (y - 2)^2 = 9$ ， $A(1, -1)$ ，直線 L 的方向向量為 $\vec{v} = (1, k)$ (其中 $k > 0$) 且通過 A 點。若 L 與圓 C 相交於相異兩點 P 、 Q 且 $\overline{PQ} = 4$ ，則正實數 k 之值為_____。

Ans : 1. $2x + y = 0$ 2. (1) $2x - y + 4 = 0$ (2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ 3. 5 4. $x - y + 5 = 0$

5. 20 6. $0 < m < \frac{12}{5}$ 7. $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$ 8. 5 9. $\sqrt{6}$ 10. 2

第 29 回 圓的切線

1. 求與兩軸相切且過點 $(-2, 1)$ 的圓方程式為 _____。(有兩解)
2. 哪個選項的點與圓 $C: x^2 + y^2 = 25$ 所作的切線斜率最大?
(A) $(0, 5)$ (B) $(3, 4)$ (C) $(-3, 4)$ (D) $(-4, -3)$ (E) $(4, -3)$
3. 設兩直線 L_1 、 L_2 斜率皆為2、且同時與圓 $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 20$ 相切，設 L_1 、 L_2 分別與 x 軸交於 A 、 B 兩點，則 $\overline{AB}$ 之長度為 _____。
4. 設一圓切 y 軸於 $(0, 3)$ ，又被 x 軸所截弦長為8，求此圓之方程式為 _____。
5. 設 a 、 b 均為實數，已知直線 $L: y = ax - 1$ 切圓 $\Gamma: x^2 + y^2 - 4x - 4y + b = 0$ 於點 P 。
 - (1) 若切點 $P(1, 0)$ ，求 $a + b$ 之值。
 - (2) 試求符合題目條件的圓 Γ 中，最大圓的半徑。

6. 座標平面上，圓 $C: x^2 + (y + 1)^2 = 4$ ，已知過圓外一點 P 對圓 C 作切線，切點為 $A、B$ ，且過 $P、A、B$ 三點的圓方程式為 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = k$ ，則 $k =$ _____。
7. 從點 $A(4, 2)$ 向圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$ 作兩切線，切點分別為 $P、Q$ ，則下列哪些選項是正確的？
 (A) 圓 C 的圓心座標為 $(-2, 2)$ (B) 圓 C 的半徑長為 $\sqrt{5}$ (C) 切線段長 $\overline{AP} = \sqrt{15}$
 (D) $\triangle APQ$ 之外接圓的圓心座標為 $(3, 0)$ (E) $\triangle APQ$ 之外接圓的半徑長為 $\sqrt{5}$
8. 座標平面上 $(6, 3)$ 處有一光源，將圓 $C: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0$ 投射在 y 軸上，求其在 y 軸上的陰影長度為 _____。
9. 在座標平面上 $A(2, 7)$ 處有一光源，將圓 $C: (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$ 投射到直線 $y = -1$ 上，求其在直線 $y = -1$ 上的影子 $\overline{PQ}$ 長為 _____。

===== 挑戰區 =====

10. 直線 $x + 3y - a = 0$ 與 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + b = 0$ 相切於 $(2, c)$ ，則序組 $(a, b, c) =$ _____。

11. 在坐標平面上，一圓通過點 $A(-2, 7)$ ，且與直線 $4x + 3y - 14 = 0$ 相切於點 $P(-1, 6)$ ，若此圓的方程式為 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ，則序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 若直線 $x - 2y = 3c$ 與圓 $(x - 3)^2 + (y + a)^2 = b$ 相切於 $(5, 1)$ ，求序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
13. 設圓 $C: x^2 + y^2 + ax + by + 14 = 0$ 與直線 $L: x - 2y + c = 0$ 相切於點 $P(5, 1)$ ，求 $a + b + c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans : 1. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 或 $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ 2. E 3. 10
 4. $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$ 或 $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$ 5. (1) 4 (2) $\sqrt{13}$ 6. 18 7. BCDE 8. 12
 9. 20 10. $(5, -5, 1)$ 11. $(10, -6, 9)$ 12. $(-5, 20, 1)$ 13. -19

第 30 回 圓系、綜合問題

- 下列何者的圖形為一個圓？ (A) $x^2 + y^2 = 0$ (B) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 64$
(C) $x^2 + y^2 + 4x + 4y = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 16 = 0$ (E) $(x-1)(x-3) + (y+2)(y-4) = 0$
- 已知兩點 $A(2, 1)$ ， $B(0, -1)$ ，則滿足 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$ 之動點 P 的軌跡方程式為 _____。
- 設圓 $C: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 36$ ，若 $A(-5, 2)$ 為圓內一點，可求得過 A 之所有弦中點的軌跡方程式為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，則序組 $(d, e, f) =$ _____。
- 已知圓 $C: x^2 + y^2 - 8x + 6y - 3 = 0$ 與直線 $L: 3x - 5y + 2 = 0$ 相交於 A 、 B 兩點，求過 A 、 B 兩點的圓，其圓心在直線 $M: x + 6y - 10 = 0$ 上的圓方程式為 _____。

Ans : 1. BCE 2. $3x^2 + 3y^2 + 4x + 10y - 1 = 0$ 3. $(6, -1, 3)$ 4. $x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x - \frac{26}{9}y + \frac{5}{9} = 0$

第 31 回 多項式基本觀念

1. 設 $f(x) = 2x^2 - x + 1$ 與 $g(x) = 2x^2 - 3x + 4$ ，試求 $f(x) - g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 下列哪些不為 x 的多項式：
(A) $x^2 + 3|x| - 1$ (B) $\sqrt{x^3 + x - 1}$ (C) $2^x + \frac{7}{x}$ (D) $x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 1$ (E) $\frac{1}{3}x^3 - \sqrt{2}x^2 + |-1|$
3. $f(x) = (a^2 - a - 6)x^3 + (a + 2)x^2 + 3x + 5$ 為二次多項式，則 $a = ?$
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 3 (E) 5
4. 設 a 、 b 、 c 為實數，若 $f(x) = a(x^2 - 4x) + b(-x^2 - x - 2) + 4x - c$ 為零多項式，則 $a + b + c$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 設 $f(x) = (a + 2)x^2 + (b - 4)x + c + 3$ ， $g(x) = 2x - 3$ 為兩多項式，若 $f(x) = g(x)$ ，則序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 設 $f(x) = (1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4)(3x^3 + 2x^2 + x + 1)$ ，則 $f(x)$ 的 x^3 項係數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. $(x^5 - 2x^4 - x^2 + 2x - 1)(5x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 1)$ 展開式中， x^5 項係數為
(A) 5 (B) 14 (C) -9 (D) -5 (E) -3

8. 解方程式 $\frac{3}{(x+5)(x+8)} = \frac{x+7}{x+8} - \frac{2}{x+5}$ 。
9. 若 $(4x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 - x + 7) \div (2x^2 - 3x + 1)$ 的商為 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，則 $c = ?$
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3
10. 已知 $x^3 + ax^2 + 3x - 1$ 除以 $x^2 - x + 2$ 的商式為 $bx + 1$ ，餘式為 $2x + c$ ，
試求實數序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
11. 設 $f(x) = (x+1)^{10} + 3(x-1)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ ，
試求奇次項係數 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 設多項式 $f(x) = (x-2)^5 + 8(x-2)^4 + 7(x-2)^3 + 10(x-2)^2 + 11(x-2) + 7$ ，試求：
(1) $f(x)$ 展開式中的常數項。
(2) $f(x)$ 展開式中的各項係數和。
(3) $f(x)$ 展開式中偶次項的係數和。
(4) $f(x)$ 展開式中奇次項的係數和。

13. 計算 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)(x^{10}+3x^8+5x^6+7x^4+9x^2+11)$ 展開式中，試求：

(1)常數項。 (2) x^5 項係數。 (3)各項係數和。

14. 已知 a 是實數，若 $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + x + a)^3$ 展開式中的各項係數總和為 8，

試求 $f(x)$ 的偶次項係數總和為何？ (A) -28 (B) -16 (C) 8 (D) 26 (E) 36

15. 設 k 為整數，且 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + kx - 1$ ， $g(x) = x^3 + kx^2 + 2x + 3$ ，

在 $f(x) \times g(x)$ 之乘積展開式中，若所有偶次項係數和恰為奇次項係數和的 2 倍，則 k 值 =

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

===== 挑戰區 =====

16. 已知兩多項式 $f(x) = x^2 - 11x - 8$ 與 $g(x) = ax(x+1) + b(x+1)(x-1) + cx(x-1)$ 相等，

試求實數序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 設 m 是正整數，且 $x^2 - (4 - \sqrt{2})x - 5 - \sqrt{2}m = 0$ 有有理根，則 $m =$ _____。

18. 已知 p 為質數，若有一整係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(18) = 2014$ ， $f(p) = 1911$ ，試求滿足上述條件的所有 p 值之和 = _____。

Ans : 1. $2x - 3$ 2. ABCD 3. D 4. 0 5. $(-2, 6, -6)$ 6. 21 7. C 8. -2 9. E
10. $(0, 1, -3)$ 11. 128 12. (1) 65 (2) 6 (3) 143 (4) -137 13. (1) 11 (2) 116 (3) 756
14. A 15. C 16. $(-9, 8, 2)$ 17. 5 18. 36

第 32 回 綜合除法

1. 小如利用綜合法計算多項式 $f(x)$ 除以 $2x+3$ 的商式 $q(x)$ 及餘式 $r(x)$ 。

她的過程完全正確(過程如右)，但將一些數字以英文字母表示，

$$\begin{array}{r|l} 2 + p + 9 + q & h \\ \hline a + b + c & \\ \hline d + e + 6 & + 3 \end{array}$$

請判斷下列選項哪些是正確的？ (A) $d + h = \frac{7}{2}$ (B) $p = e + 3$

(C) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 9x - 12$ (D) $q(x) = 2x^2 + 2x + 6$ (E) $r(x) = 3$

2. 設 $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 5 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ ，且 a 、 b 、 c 、 d 皆為實數，試求：
(1) 序組 (a, b, c, d) 。 (2) $f(0.99)$ (求近似值到小數點後第三位)

3. 設 $f(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 30$ ，則：

(1) 若將 $f(x)$ 表示成 $a(x-3)^3 + b(x-3)^2 + c(x-3) + d$ ，求序組 (a, b, c, d) 。

(2) 求 $f(2.99)$ 的近似值。(四捨五入取小數點後二位數字)

4. 設 $f(x) = 54x^3 - 99x^2 + 66x - 20$ ，

(1) 若 $f(x) = a(3x-1)^3 + b(3x-1)^2 + c(3x-1) + d$ ，試求 $a+b+c+d$ 之值為何？

(2) 試求 $f(0.33)$ 的近似值為何？(四捨五入到小數點後第二位)

5. 已知 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 7$ ，試求 $f(2.01)$ 的近似值到小數點以下第二位。(請在第三位四捨五入)

6. 下列哪個選項化簡後可以得到多項式 $2x^3 + x^2 - 3x + 4$ ？

(A) $(x-1)^3 + 8(x-1)^2 + 5(x-1) + 4$

(B) $2(x-1)^3 + (x-1)^2 + 3(x-1) + 8$

(C) $2(x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 3(x-1) + 4$

(D) $2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 5(x-1) + 4$

(E) $2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 9(x-1) + 3$

===== 挑戰區 =====

7. 設 b 為 $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ 的小數部份，已知多項式為 $f(x) = x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 6x + 5$ ，求 $f(b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4

Ans : 1. BE 2. (1) (3, 7, 9, 10) (2) 9.911 3. (1) (1, 2, 5, -6) (2) -6.05 4. (1) -4 (2) -7.06

5. 1.05 6. D 7. 4

第 33 回 插值法

牛頓插值法

1. 設 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 4 = a(x-1)(x+2)(x-2) + b(x-1)(x+2) + c(x-1) + d$ ，
則序組 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 已知兩多項式 $g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$ 與 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x + 3$
相等，則實數 $a + b + c + d = ?$ (A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 22
3. 設 $f(x)$ 為三次多項式， $f(1) = f(-2) = 0$ ， $f(-1) = -4$ ， $f(3) = 60$ ，則 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. $f(x)$ 為三次多項式，若 $f(1) = 5$ ， $f(2) = 10$ ， $f(3) = 17$ ，
則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(請展開並降冪排列)

5. 試求圖形通過 $(-2, -18)$ ， $(1, 3)$ ， $(0, 2)$ 三點的二次函數為 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

拉格朗日插值法、差分法 [課外補充]

6. 設 $f(x)$ 為三次多項式，且已知 $f(0)=1$ ， $f(1)=0$ ， $f(2)=9$ ， $f(3)=34$ ，試求 $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 設 $f(x)$ 為二次多項式，已知 $f(98)=5$ ， $f(99)=6$ ， $f(100)=25$ ，試求 $f(101)$ 的值。

8. 已知二次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(2012)=2$ ， $f(2013)=6$ ， $f(2014)=4$ ，則 $f(2015) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 下表是實驗室中某液體在冷卻時，在三個時間點的溫度紀錄：
試利用滿足上述條件的最低次實係數多項式，
估計當 $x=100$ 時的液體溫度為_____°C。

時間 x (分)	96	98	99
液體溫度 y (°C)	50	46	20

10. 設 a 、 b 、 c 成等差且公差不為 0，二次函數

$$f(x) = 5 \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + 10 \cdot \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + 5 \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$$

下列選項何者正確？

- (A) $f(a)$ 、 $f(b)$ 、 $f(c)$ 成等差
(B) 直線 $x=b$ 為 $f(x)$ 圖形的對稱軸
(C) $f(x)$ 的圖形與 x 軸沒有交點
(D) $f(x)$ 的最大值為 10
(E) $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 所得的餘式即為圖形通過 $(a, 5)$ ， $(b, 10)$ 兩點的插值多項式函數

Ans : 1. $(2, 7, -2, 0)$ 2. D 3. -6 4. $x^2 + 2x + 2$ 5. $-3x^2 + 4x + 2$ 6. 81 7. 62 8. -4
9. -22 10. BDE

第 34 回 除法原理

1. 若 $(4x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 - x + 7) \div (2x^2 - 3x + 1)$ 的商為 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，
則 $c =$ (A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3。
2. 若多項式 $x^2 + x + 2$ 能整除 $x^5 + x^4 + x^3 + px^2 + 2x + q$ ，則 $2p + 3q =$ _____。
3. 已知 a, b 為實數 $x^3 + x^2 + ax + 2$ 除以 $x^2 + 2x + b$ 的商式為 $x - 1$ ，餘式為 $x + 5$ ，求數對 $(a, b) =$ _____。
4. 已知 $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 21x - 31$ 除以 $g(x)$ 的商式為 $x^2 - 4x + 5$ ，餘式為 $2x - 1$ ，則多項式 $g(x) =$ _____。

5. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $2x+3$ 的商式為 $Q(x)$ ，餘式為 r ，則下列哪些選項是正確的？

(A) 多項式 $f(x)$ 除以 $4x+6$ 的商式為 $\frac{Q(x)}{2}$

(B) 多項式 $f(x)$ 除以 $4x+6$ 的餘式為 $2r$

(C) 多項式 $xf(x)$ 除以 $2x+3$ 的餘式為 $\frac{3}{2}r$

(D) 多項式 $f(2x)$ 除以 $4x+3$ 的餘式為 r

(E) 多項式 $f(\frac{x}{2})$ 除以 $x+3$ 的餘式為 $\frac{r}{2}$

6. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $2x-3$ 的商式為 $Q(x)$ ，餘式為 r ，則下列哪些選項是正確的？

(A) $f(x)$ 除以 $x-\frac{3}{2}$ 的商式為 $2Q(x)$ ，餘式為 r

(B) $f(x)$ 除以 $10x-15$ 的商式為 $\frac{Q(x)}{5}$ ，餘式為 r

(C) $xf(x)$ 除以 $2x-3$ 的商式為 $xQ(x)$ ，餘式為 r

(D) $f(\frac{x}{2})$ 除以 $x-3$ 的商式為 $Q(\frac{x}{2})$ ，餘式為 r

(E) $f(3x)$ 除以 $2x-1$ 的商式為 $3Q(3x)$ ，餘式為 r

7. 設多項式 $f(x)$ 被 $ax-b(a \neq 0)$ 除之商式為 $q(x)$ ，餘是為 r ，下列何者為真？

(A) 以 $x-\frac{b}{a}$ 除 $f(x)$ 之餘式為 $\frac{r}{a}$

(B) $\frac{1}{a}f(x)$ 被 $ax-b$ 除之餘式為 $\frac{r}{a}$

(C) $f(bx)$ 被 $ax-1$ 除之商式為 $bq(bx)$

(D) $f(bx)$ 被 $ax-1$ 除之餘式為 br

(E) $xf(x)$ 被 $ax-b$ 除之餘式為 br

8. 多項式 $f(x)$ 除以 $x^4 + 2x^2 - 3x + 5$ 後，商為 $x^2 + 3x - 2$ ，餘式 $x^3 - x^2 + 2x - 4$ ，

則 $f(x)$ 除以 $x^2 + 3x - 2$ 後之商為何？

(A) $x^3 - x^2 + 2x - 4$

(B) $16x - 12$

(C) $x^4 + 2x^2 - 3x + 5$

(D) $x^4 + 2x^2 - 2x + 1$

(E) $x^4 + 2x^2 + 3x - 2$

9. 設 $f(x)$ 為三次多項式，若除以 $x^2 + 1$ 的餘式為 $-x + 3$ ，除以 $x - 1$ 的餘式為 6，且 $f(x)$ 有一次因式 x ，
則 $f(x) =$ _____ (答案須展開整理並降冪排列)。

10. 試求 $4\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 8\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 15\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right) + 5$ 的值為_____。

11. 設 $f(x)$ 為一多項式，若 $(x+2)f(x)$ 除以 x^2+x+2 的餘式為 $x-6$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+2 的餘式為_____。
12. 設 $f(x)$ 為一多項式，若 $xf(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為 $5x+3$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為_____。
13. 設 $f(x)$ 為一多項式。若 $(x-1)f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為 $2x-5$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為_____。

Ans : 1. E 2. 30 3. (2, 3) 4. x^2-x-6 5. AD 6. ABDE 7. BC 8. D 9. $5x^3-3x^2+4x$
 10. $3-2\sqrt{2}$ 11. $2x-1$ 12. $-3x+8$ 13. $3x+2$

第 35 回 餘式定理

1. 設多項式 $f(x) = x^{2015} + 5x^{100} + 9$ ，試求 $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為_____。
2. 若 $f(x) = x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ ， $g(x) = x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x$ ，試求多項式 $f(x) - g(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為_____。
3. 設 $f(x)$ 以 $x - \frac{b}{a}$ 除之得商為 $q(x)$ ，餘式為 r ，則 $x \cdot f(x)$ 除以 $ax - b$ 的商為_____。
4. 已知 $f(x) = 3x^5 - 22x^4 - 12x^3 - 33x^2 + 10x + 5$ ，試求 $f(8) =$ _____。
5. 設 $f(x) = x^5 + 6x^4 - 4x^3 + 25x^2 + 30x + p$ ，若 $f(-7) = 6$ ，試求 $p =$ _____。
6. 試求 $11^5 - 5 \times 11^4 - 61 \times 11^3 - 56 \times 11^2 + 12 \times 11 + 7$ 的值_____。
7. 設 $19^5 - 17 \times 19^4 - 34 \times 19^3 - 75 \times 19^2 + a \times 19 - 3 = 377$ ，則 $a =$ _____。

8. 試求 $6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^5 + 7 \times \left(\frac{4}{3}\right)^4 - 29 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 36 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 44 \times \left(\frac{4}{3}\right) + 15$ 的值為_____。
9. 設 $f(x) = 4x^4 - 5x^2 - 6x + 2$ 除以 $(2x - 1)$ 的商式為 $Q(x)$ ，餘數為 r ，則 $Q(0) + r$ 的值為_____。
10. 設 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx$ 以 $x - 1$ 、 $x + 3$ 除之，分別餘 2 、 -10 ，則數對 $(m, n) =$ _____。
11. 已知 $f(x) = (x^2 - x - 6)(x^3 + 2x + 1) + 5x - 4$ ， $g(x) = (x^2 - 4)(x^4 - 2x + 1) + 4$ ，
則 $f(x) \cdot g(x)$ 除以 $x + 2$ 的餘式為_____。
12. 設 $x - 3$ 為多項式 $f(x)$ 的因式，且以 $x - 1$ 除 $f(x)$ 的餘式為 4 ，商為 $q(x)$ ，
則 $q(x)$ 除以 $x - 3$ 的餘式為_____。
13. 多項式 $f(x)$ 除以 $x - 2$ 得餘式 7 ，除以 $x + 3$ 得餘式 -8 ，則 $f(x)$ 除以 $(x - 2)(x + 3)$ 的餘式為_____。

14. 多項式 $f(x) = 2x^{2013} + 1$ 除以 $(x-1)(x+1)$ 的餘式為_____。
15. 設 $f(x)$ 除以 $x^2 - x - 6$ 的餘式為 $2x - 1$ ，除以 $x^2 - 3x + 2$ 的餘式為 -1 ，
則 $f(x)$ 除以 $x^2 - 4x + 3$ 的餘式為_____。
16. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - x - 2$ 的餘式為 $4x + 7$ ，除以 $x^2 - 1$ 的餘式為 $x + 4$ ，
則 $f(x)$ 除以 $x^2 - 3x + 2$ 的餘式為_____。
17. 多項式 $f(x)$ 以 $x^2 + x + 1$ 除之，餘 $x + 1$ ，以 $x - 2$ 除之，餘 10 ，若以 $(x - 2)(x^2 + x + 1)$ 除 $f(x)$ ，
則餘式為_____。(請將答案化簡為 $ax^2 + bx + c$ 的形式)
18. 已知 $f(x)$ 為四次多項式，以 $(x + 1)^3$ 除之餘式為 3 ，以 $x + 2$ 除之餘式為 8 ，以 $x - 1$ 除之餘式為 11 ，求 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

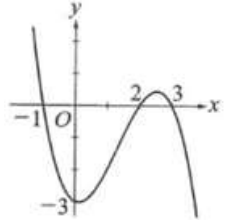
19. 設 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ ，若 $f(x)$ 除以 $x^2 - 4x + 1$ 的餘式為 $7x + 1$ ， $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 2 ，則 $f(x)$ 除以 $x + 1$ 的餘式為_____。
20. 設多項式 $f(x)$ 分別除以 $x^2 + x - 2$ ， $x^2 - x - 6$ ， $x^2 + x - 12$ 所得餘式依次為 $2x + 5$ ， $3x + a$ ， $4x + b$ ，試求數對 $(a, b) =$ _____。
21. 若 $x^3 + ax - 15$ 除以 $x - b$ 的餘式為 25 ，則 $x^3 + ax + 15$ 除以 $x + b$ 的餘式為_____。
22. 已知 $f(x)$ 為三次多項式，且 $f(1) = f(2) = 4$ ， $f(3) = 8$ ， $f(4) = 22$ ，則 $f(x) =$ _____。

23. 設 $f(x)$ 各項係數和為 20，偶次項係數和為 30，以 $x-3$ 除 $f(x)$ 得商式 $q(x)$ 餘式 4，則 $x+1$ 除 $q(x)$ 所得餘式為_____。

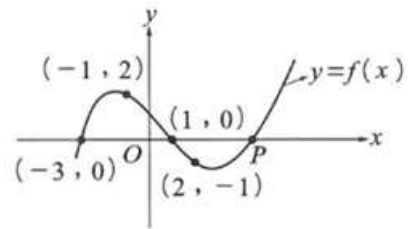
Ans : 1. 13 2. 11 3. $\frac{x}{a} \cdot q(x) + \frac{r}{a}$ 4. 21 5. 20 6. 18 7. 1 8. -1 9. -6 10. $(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$
11. -56 12. -2 13. $3x+1$ 14. $2x+1$ 15. $3x-4$ 16. $10x-5$ 17. x^2+2x+2 18. 84
19. -12 20. (7, 4) 21. -25 22. x^3-4x^2+5x+2 23. -9

第 36 回 因式定理

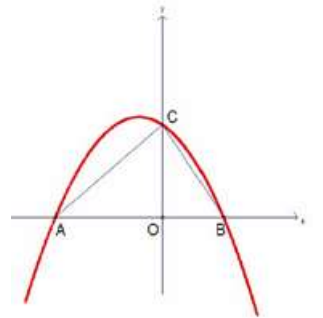
1. 右圖為三次函數 $f(x)$ 的圖形，與 x 軸交於 $(-1, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(3, 0)$ ，與 y 軸交於 $(0, -3)$ ，則 $f(5) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 三次實係數多項函數 $y = f(x)$ 之部分圖形如右，試求 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(不需展開)



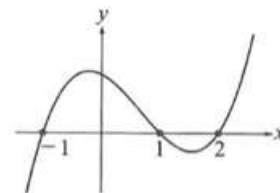
3. 設二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形交 x 軸於 A 、 B 二點，與 y 軸交於 C 點(如圖)。若 $\overline{AC} = 20$ ， $\overline{BC} = 15$ ， $\overline{AC}$ 垂直於 $\overline{BC}$ ，則實數序對 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



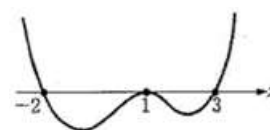
4. 設 $f(x) = -4x^{2016} + ax^{105} + b$ ，且 $x+1$ 、 $x-1$ 均為 $f(x)$ 之因式，求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 設三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形如右，
又已知 $f(-1) = f(1) = f(2) = 0$ ，則下列何者正確？

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $d > 0$ (E) $8a - 4b + 2c - d > 0$



6. 已知四次多項式 $f(x)$ 的圖形如右，且 $f(0) = -\frac{1}{2}$ ，
則此四次多項式 $f(x) =$ _____ (不需展開)



7. 若方程式 $x^2 - 5x + 2 = 0$ 的兩根也是方程式 $3x^4 - 14x^3 + mx^2 + nx - 2 = 0$ 的根，則 $m + n =$ _____。

===== 挑戰區 =====

8. 若方程式 $(x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) + (x-3)(x-1) = 0$ 的兩根為 α, β ，則 $(5-\alpha)(5-\beta) =$ _____。

9. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為兩個多項式，且 $f(1) = g(1) = 1$ 、 $f(2) = g(2) = 4$ 、 $f(3) = g(3) = 9$ 。
- (1) 試說明：以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 分別除 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，所得到的餘式相同。
- (2) 承(1)，試求該餘式。

Ans : 1. -18 2. $\frac{1}{10}(x+3)(x-1)(x-4)$ 3. $\left(-\frac{1}{12}, -\frac{7}{12}, 12\right)$ 4. $(0, 4)$ 5. ADE

6. $\frac{1}{12}(x+2)(x-1)^2(x-3)$ 7. 7 8. $\frac{26}{3}$ 9. (1) 略 (2) x^2

第 37 回 線型函數

1. 設 $f(x)$ 為線型函數，當 x 增加 3 單位時，其相對應之函數值減少 20 單位，且 $f(3)=0$ ，試求 $f(-3)=$ _____。
2. 線型函數 $y=f(x)=ax+b$ ，當 $x=-1$ 時， $y=5$ ；當 $x=3$ 時， $y=-3$ ，求 $f(4)=$ _____。
3. 設 $f(x)$ 為一次函數，且 $f(1)=5$ ， $f(3)=9$ ，則下列何者正確？
(A) $f(0)=-1$ (B) $f(-1)=-2$ (C) $f(-2)=-3$ (D) $f(-3)=-4$ (E) $f(-4)=-5$
4. 某次段考成績普遍低落，老師決定用一次函數來調整分數，將全班最低分 20 分調整為 45 分，最高分 50 分調整為 90 分，則原來分數 40 分，調整之後是_____分。
5. 某次考試，所得分數 x 之最低者為 20 分，最高者為 120 分，今把這分數 x 用一次函數 $y=ax+b$ 變換為最低分數 0 分，最高分數 100 分，試求原來 80 分者變為_____分。
6. 在職棒比賽中 ERA 值是了解一個投手表現的重要統計數值，其計算方式如下：若此投手共主投 n 局，其總責任失分為 E ，則其 ERA 值為 $\frac{E}{n} \times 9$ ，有一位投手在之前的比賽中共主投了 90 局，且這 90 局中他的 ERA 值為 3.2，在最新的一場比賽中此投手主投 6 局無責任失分，則打完這一場比賽後，此投手的 ERA 值成為
(A) 2.9 (B) 3.0 (C) 3.1 (D) 3.2 (E) 3.3

Ans : 1. 40 2. -5 3. E 4. 75 5. 60 6. B

第 38 回 二次多項式(基礎篇)

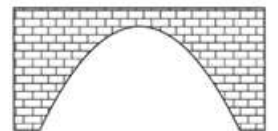
- 試求二次函數 $y = -2x^2 + 3x + 1$ 圖形的 (1)頂點坐標。 (2)對稱軸方程式。
- 設二次函數 $y = f(x)$ 圖形的頂點為 $(-1, 5)$ ，且通過點 $(1, -3)$ ，則 $f(5) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 已知二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ， $(a > 0)$ 的對稱軸是 $x = 2$ ，若 $(\sqrt{2}, y_1)$ ， (π, y_2) ， $(0, y_3)$ 三坐標在二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形上，則 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小關係是下列哪一個選項？
(A) $y_1 > y_2 > y_3$ (B) $y_1 < y_2 < y_3$ (C) $y_2 < y_1 < y_3$ (D) $y_2 > y_1 > y_3$ (E) $y_2 > y_3 > y_1$
- 已知二次函數 $f(x)$ 滿足 $f(3) = f(-1) = -4$ ，且 $f(x)$ 有最大值 4，試求 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 已知 b 、 c 皆為實數，若函數 $f(x) = -x^2 + bx + c$ 對任意實數 t 都滿足 $f(3-t) = f(3+t)$ ，則下列敘述哪些是正確？ (A) $f(1) < f(2) < f(3)$ (B) $f(2) < f(3) < f(4)$ (C) $f(3) < f(4) < f(5)$ (D) $f(\sqrt{3}) < f(\pi)$ (E) $b > 0$

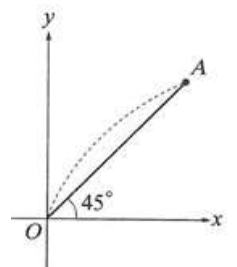
6. 二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，若已知 $f(5) > f(1) > 0 > f(3)$ ，且當 $x = h$ 時， $f(x)$ 有最小值，則下列有關 h 的敘述哪一個是正確的？ (A) $1 < h < 2$ (B) $2 < h < 3$ (C) $3 < h < 4$ (D) $4 < h < 5$

7. 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，已知 $f(3) > f(-1) > 0 > f(1)$ ，且當 $x = k$ 時， $f(x)$ 有最小值，下列何者正確？ (A) $k < -1$ (B) $-1 < k < 0$ (C) $0 < k < 1$ (D) $1 < k < 2$ (E) $2 < k < 3$

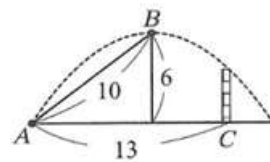
8. 已知一拋物線形拱門(如右圖所示)，
拱門的底部寬為 10 公尺，最高點距地面為 5 公尺，
試問在距地面 3 公尺處，拱門的水平寬度為_____公尺。



9. 有一斜坡，與地面成 45° 角，如右圖，小強站在 O 點，將一籃球向斜坡上拋，假設籃球飛行路徑方程式為 $y = \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4}$ ，也就是說籃球與小強的垂直距離為 x 公尺時，其高度為 y 公尺，設籃球在斜坡上的落點為 A ，則 A 點的高度為_____公尺。



10. 如右圖，假設王建民在本壘 A 處，擊出一支全壘打(路徑為拋物線)，經測量球在最高點 B 時的位置，距離地面 6 公尺，距離本壘 A 處 10 公尺，而全壘打牆角 C ，距本壘 A 處 13 公尺，問此全壘打牆的牆高設計最高不得超過_____公尺。



11. 設 $y = x^2 + 4x + k$ 之圖形與 x 軸交於 A 、 B 兩點，又 $\overline{AB} = 2$ ，則 $k =$ _____。

12. 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形，其對稱軸為 $x = 2$ 與 y 軸交於 $(0, 5)$ ，

與 x 軸交於 A 、 B 二點且 $\overline{AB} = 6$ ，則序組 $(a, b, c) =$ _____。

13. 若二次函數 $f(x)$ 的圖形通過原點，以 $x = 1$ 為對稱軸，且頂點位於直線 $2x + y = 0$ 上，則 $f(x) =$ _____。

14. 已知二次函數 $y = ax^2 + bx - 3$ 在 $x = 2$ 時有最大值 5，試求數對 $(a, b) =$ _____。

15. 已知二次函數 $f(x) = ax^2 - 12x + b$ 在 $x = \frac{-3}{2}$ 時有最大值 10，則 $a \times b$ 之值為_____。

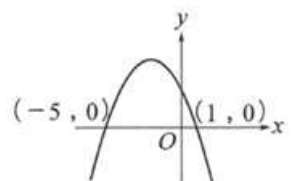
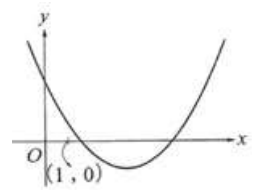
16. 二次函數 $y = ax^2 + bx + \frac{6}{a}$ 在 $x = -1$ 時有最大值 5，則數對 $(a, b) =$ _____。
 $(-6, -12)$

Ans : 1. (1) $(\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$ (2) $x - \frac{3}{4} = 0$ 2. -67 3. B 4. $-2(x - 1)^2 + 4$ 5. ADE 6. B 7. C 8. $2\sqrt{10}$

9. 2 10. $\frac{117}{32}$ 11. 3 12. $(-1, 4, 5)$ 13. $2(x - 1)^2 - 2$ 14. $(-2, 8)$ 15. -4 16. $(-6, -12)$

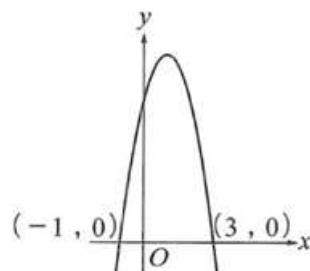
第 39 回 二次多項式(進階篇)

1. 二次函數 $y = -2x^2 + 4x - 1$ 的圖形向右移動 2 單位，向下移動 3 單位，得二次函數 $y = -2x^2 + ax + b$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 將 $y = 2x^2 + kx + 6$ 的圖形向右平移 2 單位，再向上平移 3 單位後與 x 軸交於點 $(5, 0)$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 若將 $y = 2x^2 + 4x + 3$ 之函數圖形向右平移 h 單位，向上平移 k 單位，會與圖形 $y = 2(x-1)^2 + 4$ 重合，求數對 $(h, k) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 之圖形如右，則下列各式何者成立？
(A) $a < 0$ (B) $b < 0$ (C) $c < 0$ (D) $b^2 - 4ac < 0$ (E) $9a - 3b + c < 0$
5. 若函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形如右圖，則下列各數哪些為負數？
(A) ab (B) bc (C) $b^2 - 4ac$ (D) $a + b + c$ (E) $4a - 2b + c$



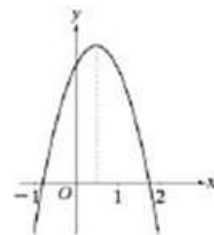
6. 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形如右，試問下列敘述何者正確？

(A) $a < 0$ (B) $b^2 - 4ac > 0$ (C) $2a + b = 0$ (D) $c < 0$ (E) $4a - 2b + c > 0$



7. 設二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形如右，則下列哪些選項為真？

(A) $ac > 0$ (B) $b > 0$ (C) $b^2 - 4ac > 0$ (D) $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c > a - b + c$ (E) $2a + b < 0$



8. 若 a 、 b 為實數，且二次函數 $f(x) = a(x-3)^2 + b$ 滿足 $f(5) < 0$ ， $f(6) > 0$ ，則下列何者為真？

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $f(-1) > 0$ (D) $3a + b > 0$ (E) $2a - 3b > 0$

9. 設 k 為實數，方程式 $x^2 + 2x - k = 0$ ，若方程式有兩實根，則 k 之範圍為_____。

10. 若二次函數 $f(x) = x^2 + 4x - k$ 的函數值恆為正數，試求 k 的範圍為_____。

11. 設 m 為實數，若二次函數 $y = x^2 + 10x + m + 6$ 的圖形恆在直線 $y = 2x + 2$ 的上方，試求 m 之範圍為_____。
12. 二次函數 $y = ax^2 + x + 1$ 的圖形恆在直線 $y = 2x - 1$ 的上方(沒有相交)，則 a 的範圍為_____。
13. 已知對任意實數 x ，不等式 $kx^2 + 2x + k \leq 0$ 恆無解，則實數 k 的範圍為_____。
14. (1)若二次函數 $f(x) = x^2 - 2x + (k + 1)$ 的函數值恆為正數，求實數 k 的範圍。
 (2)已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 時，有最大值 $-1 - \frac{2}{a}$ ，求 a 、 b 之值。

===== 挑戰區 =====

15. 已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 滿足以下三條件：
- (1) $f(1+x) = f(1-x)$ ；(2) $f(x)$ 的最大值為 15；(3) $f(x) = 0$ 的兩根為 x_1 、 x_2 且 $|x_1 - x_2| = 2$ 。
- 求序組 (a, b, c) 。

16. 設 a 、 b 為實數，且 $f(x) = ax^2 - 2x + b$ ，若 $f(x) < 0$ 的解為 $x < -3$ 或 $x > 1$ ，
則 $f(2x) > 0$ 的解為_____。
17. 在解方程式 $x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{19}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 = 0$ 的時候，先同乘以 6 變成 $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ ；
因為顯然 0 不是它的解，所以我們把此方程式同除以 x^2 後得到新的方程式 $6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$ ，
(1) 令 $t = x + \frac{1}{x}$ ，那麼將方程式整理成 t 的整係數方程式為何？
(2) 將 t 解出來後代回原方程式求解得到 x 的解為何？
18. 方程式 $(|x| - 1)(x + 2) = k$ ，若有相異三實根，則 k 之範圍為_____。
19. 小芬在紙上計算多項式函數，但事後因遺忘了答案，只記得此多項式函數為 $f(x) = ax^2 + c$ ， a 、 c 為整數，
還好她在計算紙上找到 $(-2, 0)$ ， $(-1, 0)$ ， $(1, 0)$ ， $(3, -16)$ ，但此多項式只通過其中三點，
則數對 $(a, c) =$ _____。

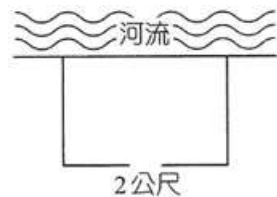
Ans : 1. $(12, -20)$ 2. -9 3. $(2, 3)$ 4. B 5. B 6. ABC 7. BCDE 8. ACE 9. $k \geq -1$

10. $k < -4$ 11. $m > 12$ 12. $a > \frac{1}{8}$ 13. $k > 1$ 14. (1) $k > 0$ (2) $a = -1, b = 2$ 15. $(-15, 30, 0)$

16. $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ 17. (1) $6t^2 - 5t - 50 = 0$ (2) $\frac{1}{3}$ 或 3 或 $-\frac{1}{2}$ 或 -2 18. $-2 < k < \frac{1}{4}$ 19. $(-2, 2)$

第 40 回 二次多項式(最大最小值問題)

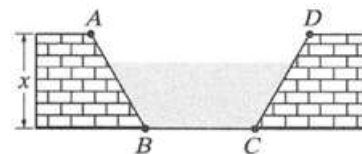
1. 如右圖所示，用 40 公尺長的繩子在筆直的河岸邊圍出一塊矩形農地(靠河岸的那一邊不會用到繩子)。並在河岸對面邊上的正中央保留寬 2 公尺的出入口，則所能圍出矩形的最大面積為_____平方公尺。



2. 阿明想利用 60 公尺長的鐵絲網圍成兩個大小一樣的矩形養雞場，如右圖，則此兩個養雞場的面積和最大為_____平方公尺。



3. 右圖是某灌溉渠道的橫截面，其中 $ABCD$ 是一個等腰梯形。已知其邊坡的傾角為 60° ，且 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 6$ 。



- (1) 設渠深為 x ，試以 x 表示 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 。
 (2) 承(1)，試以 x 表示等腰梯形 $ABCD$ 的面積 $f(x)$ 。
 (3) 當渠深 x 為多少時，可使等腰梯形 $ABCD$ 的面積 $f(x)$ 最大？

4. 員工消費合作社一只成本 120 元的紀念保溫杯，如果定價 200 元，每週可賣 300 只，若每只價錢每上漲(下跌)10 元，則每週少賣(多賣)50 只，試問：每只保溫杯的定價應為_____元，才可有最大利潤(扣除成本)？

5. 灣麗果園裡種了 40 棵檸檬樹，平均每棵年產 400 個檸檬，根據業者經驗，在此果園中每加種 1 顆檸檬樹，則每棵年產量平均減少 5 個，問應加種_____棵，才能使年總產量最多。
6. 設 $2x + y = 1$ ， x 、 y 為實數，則當 $2x^2 + y^2$ 有最小值時，數對 $(x, y) =$ _____。
7. x 、 y 均為實數，且 $4x - 5y = 12$ ，當 $\sqrt{(x+10)^2 + (y-6)^2}$ 有最小值時之數對 $(x, y) =$ _____。
8. 已知 $f(x)$ 為二次函數，其函數圖形之 x 軸截距為 3 與 -1 ， y 軸截距為 3，則 $f(x)$ 之最大值為下列哪一個選項？ (A)8 (B)7 (C)6 (D)4 (E)5
9. 若 $4 \leq x \leq 10$ ，則 $y = f(x) = x^2 + 4x + 14$ 的最小值為_____。
10. 若函數 $f(x) = -2x^2 - 12x - 3$ 在 $-5 \leq x \leq 1$ 這個範圍內的最大值為 M ，最小值為 m ，求數對 $(M, m) =$ _____。

11. 若 $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ ，試求：

(1) 設 x 為實數，則 $f(x)$ 之最小值為何？

(2) 若 $-2 \leq x \leq 0$ 且 $f(x)$ 之最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 $(M, m) = ?$

12. 關於二次函數 $f(x) = -x^2 + x + 1$ 的敘述，下列何者正確？ (A) 頂點 $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ (B) 對稱軸 $x + \frac{1}{2} = 0$

(C) 若 $-1 \leq x \leq 0$ ，則 $f(x)$ 之最大值為 $\frac{5}{4}$ (D) 若 $-2 \leq x \leq 0$ ，則 $f(x)$ 之最大值為 1

(E) 將 $f(x) = -x^2 + x + 1$ 的圖形水平右移 1 單位，再鉛直下移 2 單位可得 $f(x) = -x^2 + 3x - 3$ 的圖形

13. 設 a, b 為實數，若函數 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$ 在 $-2 \leq x \leq 2$ 的最小值為 -7 ，則 a 為_____。

14. 設某沙漠地區某一時間的溫度函數為 $f(t) = -t^2 + 10t + 11$ ，其中 $1 \leq t \leq 10$ ，

則這段時間內該地區的最大溫差為？ (A)9 (B)16 (C)25 (D)28 (E)36

15. 設 $x, y \in R$ ， $x^2 + 3y^2 = 1$ ，試求 $2x + 3y^2$ 之最小值 = _____。

16. 設二次函數 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 在 $m \leq x \leq 0$ 上的最大值為 3，最小值為 2，求實數 m 的範圍為_____。

17. 關於二次函數 $f(x) = -x^2 + 3x - 4$ 的敘述，下列何者正確？

(A) 對稱軸方程式為 $2x - 3 = 0$ (B) 若 $-1 \leq x \leq 2$ ，則 $f(x)$ 有最小值 -8

(C) 將 $y = f(x)$ 的圖形向右移平 2 單位，再向下平移 1 單位所得的新圖形為 $y = -(x - \frac{7}{2})^2 - \frac{11}{4}$

(D) 若 x 為任意實數，則 $y = f(x)$ 的函數值恆為負數 (E) 若 $x_1 > x_2 > 2$ ，則 $f(x_1) < f(x_2)$

18. 設 $\overline{AB} = 1$ ，在 $\overline{AB}$ 上任取一點 P ，以 $\overline{AP}$ 為一邊作一正方形 $APCD$ ；以 $\overline{BP}$ 為斜邊作一等腰直角三角形 BPE ，則正方形 $APCD$ 與等腰直角三角形 BPE 面積和的最小值為_____。

===== 挑戰區 =====

19. 已知 $A(-4, -4)$ 、 $B(-1, 2)$ 、 $C(1, 6)$ 在直線 $L: 2x - y + 4 = 0$ 上，設動點 P 在直線 L 上，求 $\overline{PC} + 2\overline{PB} + 3\overline{PA}$ 之最小值為_____。

(註：設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ， $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$)

20. x 為實數，若 $f(x) = 2(x-1)^2 + 3(x-5)^2 + (x-7)^2 + 4(x-9)^2$ ，則：

(1) $f(x)$ 的最小值為何？ (2) 此時 x 值為何？

21. 設 m 為實數，若方程式 $x^2 - mx + (m^2 - 5m + 3) = 0$ 有兩實根 α 、 β ，試求：

(1) m 的範圍。 (2) $\alpha^2 + \beta^2$ 的最小值。

22. 設 $f(x) = (|x+2|+1)(x-5)$ ，

(1) 作 $y = f(x)$ 的圖形。

(2) 若方程式 $f(x) = k$ 有三個相異實根，則 k 的範圍？

(3) 當 $0 \leq x \leq 5$ ，求 $f(x)$ 的最小值。

23. 函數 $f(x) = (x^2 - 4x + 1)^2 + 8(x^2 - 4x) + 5$ ，求其最小值為_____。

24. $f(x) = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 2) + 2x^2 - 8x + 1$ 的最小值為_____，此時 $x =$ _____。

Ans : 1. $\frac{441}{2}$ 2. 150 3. (1) $6 - \frac{4}{\sqrt{3}}x$ (2) $(6 - \sqrt{3}x)x$ (3) $x = \sqrt{3}$ 時， $f(x)$ 有最大值 $3\sqrt{3}$

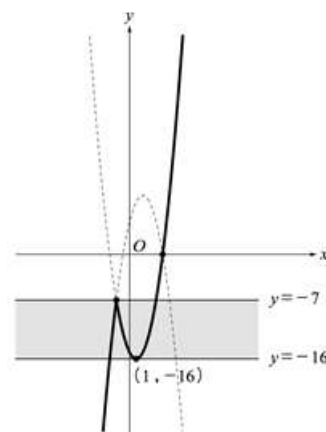
4. 190 5. 20 6. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 7. $(-2, -4)$ 8. D 9. 46 10. $(15, -17)$

11. (1) 1 (2) $(19, 3)$ 12. ADE 13. ± 3 14. C 15. -2

16. $-2 \leq m \leq -1$ 17. ABCDE 18. $\frac{1}{5}$ 19. $11\sqrt{5}$ 20. (1) 90 (2) 6

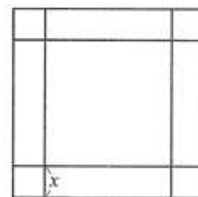
21. (1) $\frac{2}{3} \leq m \leq 6$ (2) $\frac{2}{9}$ 22. (1) 如右圖 (2) $-16 < k < -7$ (3) -16

23. -18 24. -9 ; 2

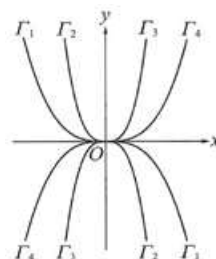


第 41 回 高次多項式

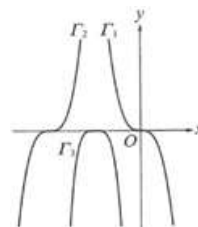
1. 如右圖，將一邊長為 7 公分的正方形鐵片的四個角落皆裁去一個面積相等的小正方形，並將其四邊折起來成為一個無蓋的長方體容器。若鐵片厚度不計，設裁去的小正方形邊成為 x 公分，長方體的容積為 $f(x)$ 立方公分，
- (1) 試寫出 x 的範圍。
- (2) 寫出多項式函數 $f(x)$ 。(需展開化簡)



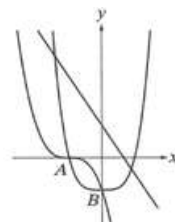
2. 右圖為下列四個函數的圖形： $\Gamma_1: y = ax^3$ 、 $\Gamma_2: y = bx^3$ 、 $\Gamma_3: y = cx^3$ 、 $\Gamma_4: y = dx^3$ ，則關於 a, b, c, d 四數的大小，下列哪一個選項是正確的？
- (A) a 的值最大 (B) b 的值最大 (C) c 的值最大 (D) d 的值最大
- (E) 條件不足，無法判斷哪一個數的值為大



3. 右圖為下列三個函數的圖形： $y = a_1x^3$ ， $y = a_2(x+7)^3$ ， $y = a_3(x-h)^4$ 。
- 選出正確的選項：
- (A) Γ_1 為 $y = a_1x^3$ 的圖形 (B) $a_1 > 0$ (C) $a_2 > 0$ (D) $a_3 > 0$ (E) $h > 0$



4. 右圖為三個函數的圖形： $f(x) = ax - b$ ， $g(x) = c(x - c)^3$ ， $h(x) = dx^4 - e$ ，其中 $y = g(x)$ 與 $y = h(x)$ 交於 A 、 B 兩點，且 A 、 B 兩點分別在 x 軸與 y 軸上，則下列何者正確？ (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $e = c^4$ (E) $d > 0$



5. 若 $f(x) = 3x^3 - 18x^2 + 31x - 8 = a(x - h)^3 + b(x - h) + k$ ，則 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 且 $f(x)$ 圖形的對稱中心的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 若 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ 的圖形對稱中心為 $(-1, 4)$ ，則 $(a, b) =$ _____。

7. 設函數 $f(x) = x^2$ ， $g(x) = x^3$ ， $h(x) = x^4$ ，則下列敘述哪些是正確？

(A) 函數 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 的圖形有 2 個交點。

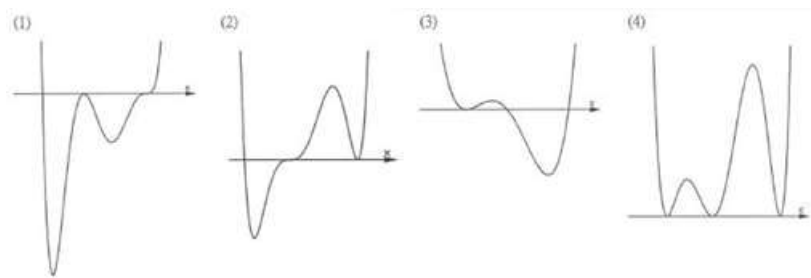
(B) 函數 $y = f(x)$ 與 $y = h(x)$ 的圖形有 3 個交點。

(C) 若函數 $f'(x)$ 的圖形向右平移 2 單位後會與函數 $f(x)$ 的圖形重合，則函數 $f'(x)$ 是偶函數。

(D) 若函數 $h'(x)$ 的圖形向右平移 2 單位後會與函數 $h(x)$ 的圖形重合，則函數 $h'(x)$ 是遞增函數。

(E) 將 $g(x) = x^3$ 的圖形向右移 2 單位，再向下移 3 單位後會與函數 $k(x) = (x+2)^3 - 3$ 的圖形重合。

8. 下列何者可能是 $f(x) = (x+3)(x+1)^3(x-2)^2$ 的部分圖形。



9. 若對於 $x \geq 600$ ，多項式 $f(x) = ax^n + 600x^2$ 恆滿足 $12x^{99} \leq f(x) \leq 12x^{99} + x^3$ ，則 $(a, n) =$ _____。

===== 挑戰區 =====

10. 設 m 、 n 都是整數，且將多項式 $x^3 + mx + n$ 因式分解後得 $x^3 + mx + n = (x-a)(x-b)^2$ ，

其中 a 、 b 是相異實數。

(1) 求 $(x-a)(x-b)^2$ 的展開式(依降冪排列)。

(2) 試證明 a 、 b 都是有理數。

Ans : 1. (1) $0 < x < \frac{7}{2}$ (2) $4x^3 - 28x^2 + 49x$ 2. C 3. AC 4. DE 5. $(3, -5)$; $(2, 6)$ 6. $(6, 1)$

7. AB 8. 2 9. $(12, 99)$ 10. (1) $x^3 + (-a - 2b)x^2 + (2ab + b^2)x - ab^2$ (2) 略

第 42 回 奇偶函數 [課外補充]

1. 下列各函數中，哪些是奇函數？

(A) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$ (B) $f(x) = (x-1)^3$ (C) $f(x) = 3x - x^3$ (D) $f(x) = |x|$ (E) $f(x) = 2x^4$

2. 若 $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ ，且 $f(-7) = 10$ ，則 $f(7)$ 的值為_____。

3. 設 $f(x) = ax^{999} + bx^{99} + cx^9 - 3$ ，若 $f(-2) = 3$ ，則 $f(2)$ 的值為

(A) 3 (B) -3 (C) 0 (D) 9 (E) -9

4. 多項式 $f(x) = ax^8 - bx^6 + cx^4 + dx - \sqrt{17}$ ，已知 $f(5) - f(-5) = -30$ ，

則 $f(2015) - f(-2015)$ 之值為_____。

===== 挑戰區 =====

5. 若 $f(x)$ 是一奇函數且在 $x = 0$ 有定義，則 $f(0) =$ _____。

6. 若對所有實數 x 而言， $f(x)$ 皆有意義，且 $f(x)$ 是奇函數也是偶函數，則 $f(2018) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 令函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 對所有實數 x 皆有意義，請問下列選項何者正確：
- (A) 若 $f(x)$ 為偶函數、 $g(x)$ 為偶函數。則 $f(x) + g(x)$ 為偶函數。
 - (B) 若 $f(x)$ 為偶函數、 $g(x)$ 為奇函數。則 $f(x) + g(x)$ 為偶函數。
 - (C) 若 $f(x)$ 為奇函數、 $g(x)$ 為奇函數。則 $f(x) + g(x)$ 為偶函數。
 - (D) 若 $f(x)$ 為奇函數、 $g(x)$ 為奇函數。則 $f(x)g(x)$ 為偶函數。
 - (E) 若 $f(x)$ 為偶函數、 $g(x)$ 為奇函數。則 $f(x)g(x)$ 為偶函數。
 - (F) 若 $f(x)$ 為偶函數、 $g(x)$ 為偶函數。則 $f(x)g(x)$ 為偶函數。
 - (G) $f(x) + f(-x)$ 為偶函數。
 - (H) $f(x) - f(-x)$ 為奇函數。

Ans : 1. AC 2. -10 3. E 4. -12090 5. 0 6. 0 7. ADFGH

第 43 回 多項不等式

1. 不等式 $6-5x-x^2 > 0$ 之解為_____。
2. $(x^2-2)(x^2-x-6) < 0$ (x 是實數) 的解為_____。
3. 不等式 $x^2-6x-9 \leq 0$ 的整數解有多少個？
(A)5 個 (B)6 個 (C)7 個 (D)8 個 (E)9 個
4. 設 a 、 b 為實數，若 $-2x^2+ax+b > 0$ 的解為 $-\frac{1}{2} < x < 3$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。
5. 設二次不等式 $ax^2-2ax+2a-3 < 0$ ，
若解為 $-1 < x < 3$ ，則 $a =$ _____。
若無實數解，求 a 的範圍_____。
6. 若 $\begin{cases} x^2-2x+a < 0 \\ x^2+bx-3 \geq 0 \end{cases}$ 的解為 $1 \leq x < 4$ ，則 $\begin{cases} x^2-2x+a > 0 \\ x^2+bx-3 \leq 0 \end{cases}$ 的解為_____。

7. 已知不等式 $ax^2 + bx + 1 \leq 0$ 的解為 $x = \frac{1}{2}$ ，試問數對 $(a, b) =$ _____。

8. 解不等式 $x^2 - x + 9 > 6\left|x - \frac{1}{2}\right|$ 。

9. 已知 a 為正整數。若不等式 $x^2 - 6x - a^2 - 6a \leq 0$ 的整數解共有 63 個，試求 $a =$ _____。

10. 設 a 、 b 、 c 為實數，若不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解為 $-1 < x < 2$ ，
則不等式 $cx^2 + ax - b < 0$ 的解為_____。

11. 設 a 、 b 為實數，若 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解為 $-4 < x < 1$ ，請問 $4ax^2 + 2bx + c \leq 0$ 的解為_____。

12. 設二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解為 $x > 2$ 或 $x < -1$ ，求不等式 $bx^2 + cx + 3a < 0$ 的解為_____。

13. 設二次不等式 $ax^2 + 5x + b > 0$ 的解為 $-\frac{1}{2} < x < 3$ ，則不等式 $bx^2 + ax + 1 < 0$ 的解為_____。

14. 設 A 與 B 是數線上兩點，它們的坐標分別為 -1 與 4 ，已知 P 是數線上的動點，而且滿足到 A 、 B 兩點的距離乘積小於 6 ，即 $\overline{PA} \times \overline{PB} < 6$ ，試求動點 P 的所有可能範圍為_____。

Ans : 1. $-6 < x < 1$ 2. $-2 < x < -\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2} < x < 3$ 3. E 4. $(5, 3)$ 5. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $a \geq 3$

6. $-3 \leq x < -2$ 7. $(4, -4)$ 8. $x < -3$ 或 $-2 < x < 3$ 或 $4 < x$ 9. 28 10. $-\frac{1}{2} < x < 1$

11. $x \leq -2$ 或 $\frac{1}{2} \leq x$ 12. $-3 < x < 1$ 13. 無解 14. $-2 < P < 1$ 或 $2 < P < 5$

第 44 回 多項不等式(題型篇)

1. 設 $f(x) = 2x^2 - 3x + k$ ，若不論 x 為任何實數，對應的 $f(x)$ 值恆為正數。求實數 k 的範圍。

- (A) $k > \frac{9}{4}$ (B) $k \leq \frac{9}{4}$ (C) $k \leq \frac{9}{8}$ (D) $k < \frac{9}{8}$ (E) $k > \frac{9}{8}$

2. 若對於任意實數 x ， $x^2 + 2(2m-1)x + m^3 + m - 1 \geq 0$ 恆成立，則實數 m 的範圍為_____。

3. 若二次函數 $f(x) = mx^2 - (2m+4)x + (3m-3)$ 的函數值恆為正數，試求實數 m 的範圍為_____。

4. 已知對任意實數 x ，不等式 $kx^2 + 2x + k \leq 0$ 恆無解，則實數 k 的範圍為_____。

5. 若不等式 $ax^2 + (2a+1)x + 3a + \frac{1}{2} \leq 0$ 恆無實數解，則實數 a 的範圍為_____。

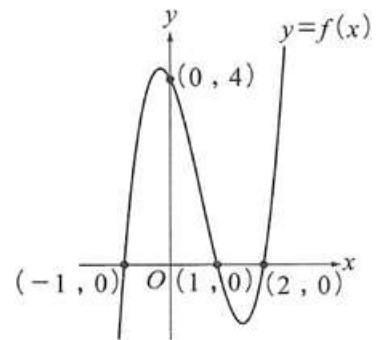
6. 下列各式子中，何者有實數解？ (A) $x^2 - x + 2 < 0$ (B) $-x^2 + \sqrt{2}x - 3 \leq 0$
(C) $x^2 + 3x - 1 > 0$ (D) $(x^2 - x + 1)^3 + 2 \leq 0$ (E) $(x^2 + x + 1)^2 + x^5 = 0$

7. a 為實數，若對任何實數 x ，不等式 $-(x+1)^2 < ax - (a+1) < x^2$ 恆成立，試求 a 的範圍。
8. 二次函數 $y = x^2 - ax + a - 1$ 的圖形恆在直線 $y = x - 2$ 上方，則實數 a 的範圍為_____。
9. 已知二次函數 $y = f(x) = (2k-1)x^2 - 3x + 2$ 的圖形恆在直線 $y = -x + 1$ 的上方，則實數 k 的範圍為_____。
10. 設 m 為實數，若 $y = mx^2 + (2-m)x + 4m$ 的圖形恆在 $y = mx$ 的圖形下方，則 m 的範圍為_____。
11. 下列哪一個不等式的解為「全體實數」(即不等式的解為任意的實數)？
 (A) $6 - 5x - x^2 \leq 0$ (B) $x^2 - x - 3 \geq 0$ (C) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ (D) $x^2 + x + 2 \leq 0$ (E) $-x^2 + x - 1 \geq 0$

Ans : 1. E 2. $2 \leq m$ 或 $m = 1$ 3. $4 < m$ 4. $1 < k$ 5. $\frac{1}{2} < a$ 6. BCE 7. $2 - 2\sqrt{2} < a < -4 + 2\sqrt{3}$
 8. $-1 < a < 3$ 9. $1 < k$ 10. $m < -1$ 11. C

第 45 回 高次多項不等式、分式不等式

1. 試求不等式的解 $x^2(x-2)(x+3) \geq 0$
2. 不等式 $x^2(x+2)(x+1)(x-5) \leq (2x+3)(x+2)(x+1)(x-5)$ 之解為_____。
3. 不等式 $(x-1)^{21}(x+2)^{15}(x-2)^{12}(x-3)^3 \geq 0$ 之解為_____。
4. 已知 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且 $y=f(x)$ 的圖形與其通過的四點如右圖所示。下列敘述哪些是正確的？
(A) 多項式 $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$
(B) 方程式 $f(x) = 0$ 的解為 $x = -1$ 或 1 或 2
(C) 方程式 $f(x) = x$ 有三個相異實根
(D) 不等式 $f(2x) \leq 0$ 的解為 $x \leq -2$ 或 $2 \leq x \leq 4$
(E) 若不等式 $f(x) \geq 4$ 的解為 $a \leq x \leq b$ 或 $x \geq c$ ，則 $a+b+c=2$



5. 求分式不等式 $x \leq \frac{1}{x}$ 的解_____。

6. 解不等式 $\frac{2x+3}{x+1} \leq 1$ _____。

7. 求下列不等式的解之範圍：

(1) 不等式 $x^2 - 4x + 1 \leq 0$ 的解。

(2) 不等式 $\frac{x+1}{x-2} < 4$ 的解。

8. 不等式 $\frac{2x+3}{x-4} < 1$ 的整數解共有多少個？

(A) 8 個 (B) 9 個 (C) 10 個 (D) 11 個 (E) 12 個

9. 下列哪些選項的不等式與不等式 $(x-1)(x+3) < 0$ 有相同的解？

(A) $(x-1)^3(x+3) < 0$

(B) $(x-1)(x-2)^2(x+3) < 0$

(C) $(x-1)(x+3)(x^2+x+1) < 0$

(D) $\frac{x-1}{x+3} < 0$

(E) $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$

10. 下列各選項哪些與不等式 $(x-1)(x-2) \geq 0$ 有相同的解？

(A) $-5(x-1)(x-2) \geq 0$

(B) $(x-1)(x-2)^3(x-3)^4 \geq 0$

(C) $\frac{(x-1)}{(x-2)} \geq 0$

(D) $(x-1)(x-2)(-x^2+2x-5) \leq 0$

(E) $(x-1)^{99}(x-2)^{101} \geq 0$

11. 關於不等式，試問下列敘述哪些正確？

(A) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 < 0$ 的解與 $-3(x-1)(x-3) > 0$ 的解相同

(B) $\frac{x-1}{x-2} \geq 0$ 的解與 $(x-1)(x-2) \geq 0$ 的解相同

(C) $(x-1)^3(x-2)^2(x^2+x+1) > 0$ 的解與 $(x-1)(x-2)^4(x^2-2x+3) > 0$ 的解相同

(D) $\frac{x-1}{x-2} > 1$ 的解與 $x-1 > x-2$ 的解相同

(E) $x^2-6x+9 > 0$ 的解為任意實數

Ans : 1. $x \leq -3$, $x = 0$, 或 $2 \leq x$ 2. $x \leq -2$ 或 $x = -1$ 或 $3 \leq x \leq 5$

3. $-2 \leq x \leq 1$ 或 $x = 2$ 或 $3 \leq x$ 4. BCE 5. $x \leq -1$ 或 $0 < x \leq 1$ 6. $-2 \leq x < -1$

7. (1) $2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$ (2) $x < 2$ 或 $3 < x$ 8. C 9. ABCD 10. BDE 11. C

第 46 回 指數、多項式、不等式混合題

1. 若 $-2 \leq x \leq 1$ ，求 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x+5}$ 的最小值為_____。
2. 若 $0 \leq x \leq 2$ ， $f(x) = 2^x - 4^{x-1}$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，試求數對 $(M, m) =$ _____。
3. 若 $a, b \in R$ ，且 $3a + 2b = 6$ ，則 $27^a + 9^b$ 的最小值為_____。

===== 挑戰區 =====

4. 設 x 為實數，若 $y = 4(3^x + 3^{-x}) + (9^x + 9^{-x}) - 5$ ，且 $t = 3^x + 3^{-x}$ ，試求：
(1) 將 y 以 t 之函數表示得 $y = ?$
(2) y 之最小值為？
5. 若 x 為實數，且 $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4-\sqrt{15}})^x = 8$ ，則 x 之值為_____。
6. x 的方程式 $4^x - a \cdot 2^{x+1} + 3 - 2a = 0$ 有兩相異實根，其中 a 為實數，試求：
(1) a 的範圍為_____。
(2) 若兩實根之和為 -1 ，則 $a =$ _____。

Ans : 1. $\frac{1}{256}$ 2. $(1, 0)$ 3. 54 4. (1) $y = t^2 + 4t - 7$ (2) 5 5. 2 或 -2 6. (1) $1 < a < \frac{3}{2}$ (2) $\frac{5}{4}$