

指數律

➤ 指數律

1. 正整數次方： $a \in R$ 、 $n \in N$ ， n 個 a 的連乘積簡寫成 $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$ ，稱為指數符號， a 為 a^n 的「底數」， n 為 a^n 的「次數」
2. 零次方：若 $a \neq 0$ ，規定 $a^0 = 1$ 。因 0^0 規定為0或1均不妥當，所以 0^0 為無意義
3. 負整數次方：若 $a \neq 0$ ， $n \in N$ ，規定 $a^{-1} = \frac{1}{a^n}$
4. 正高次根號：如二次根號的定義方式，若 $a, b > 0$ ， $n \in N$ 且 $n \geq 2$ ，滿足 $a^n = b$ ，則稱 a 為 b 的正 n 次根號，簡稱為 n 次根號 b ，記為 $a = \sqrt[n]{b}$
5. 有理數次方：利用正高次根號來定義有理數次方，如下：

若 $a > 0$ ， $m, n \in N$ 且 $n \geq 2$ ，規定 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ， $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ 。

6. 無理數次方： $a > 0$ ，利用無窮數列所靠近的數來定義無理數次方，如 $3^{\sqrt{2}}$ 與 2^π 。

(1) $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ ，數列 $3^{1.4}$ 、 $3^{1.41}$ 、 $3^{1.414}$ 、 $3^{1.4142}$ 、 $\dots$ 所靠近的數定義為 $3^{\sqrt{2}}$ 。

(2) $\pi = 3.1415\dots$ ，數列 $2^{3.1}$ 、 $2^{3.14}$ 、 $2^{3.141}$ 、 $2^{3.1415}$ 、 $\dots$ 所靠近的數定義為 2^π 。

注意! 當次數為整數時，底數可為負；當次數為分數或無理數時，底數必須為正才有意義，如 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 、 $(-2)^{\sqrt{3}}$ 均為無意義的符號、 $(-3)^2$ 不可寫成 $(-3)^{\frac{4}{2}}$ 。

7. 指數律：指數符號經過拓展，皆能滿足指數律，如 $a, b > 0$ ， x, y 為實數，則：

$$(1) a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad (2) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (3) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(4) (ab)^x = a^x \cdot b^x \qquad (5) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

若 $a^x = b^y$ 則次數可移項得 $a = b^{\frac{y}{x}}$ 。(等式兩邊同取 $\frac{1}{x}$ 次方)

8. 指數的大小關係

(1) $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $x, y \in R$ ，若 $a^x = a^y$ ，則 $x = y$ 。

(2) $a > 1$ 時，則 $x > y \Leftrightarrow a^x > a^y$ ，即次數越大值越大。如 $2^\pi > 2^3 > 2^{\sqrt{2}}$ 。

$0 < a < 1$ 時，則 $x > y \Leftrightarrow a^x < a^y$ ，即次數越大值越小。如 $\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \frac{1}{2}^4 < \frac{1}{2}^3$

➤ 指數練習題

1. $(3^{-2})^{-1} + 3^{-2} \times 3^3 + (3^{-10})^0 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。【屏東高中】

2. 若 a 為正實數，且 $(a^5)^{\frac{1}{6}} \times (a^{\frac{1}{12}})^{14} = a^x$ ，則 $x = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

3. 化簡 $\frac{\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{3}{5}} \times \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}}{8^{-\frac{2}{3}}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。【臺中二中】

4. $\left(\frac{\sqrt{2}}{21}\right)^{-3} \times (7\sqrt{18})^{-3} \times \left(\frac{0.81}{1600}\right)^{-0.25} \times \sqrt[5]{9\sqrt{3}}$ 的值為 $\text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

5. 試求下列各式的值：

(1) $27^{1+\sqrt{2}} \times 9^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。 (2) $(2^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

6. 設 $a = \sqrt[3]{\sqrt{16}}$ ， $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}$ ， $c = \sqrt[4]{2\sqrt{32}}$ ，則 $\frac{a^6 b}{c^8} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

7. 試求下列 x 代表的數：

(1) $5^{-2} = \frac{1}{x}$, $x =$ 【 】 (2) $(-3)^x = 1$, $x =$ 【 】

(3) $(2^{\sqrt{2}})^x = 4$, $x =$ 【 】。

8. 設 a 為實數且 $a \neq 0$, 若 $a + a^{-1} = \frac{1}{2}$, 則

(1) $a^2 + a^{-2} =$ 【 】。 (2) $a^3 + a^{-3} =$ 【 】。

9. 已知 $5^{2x} = 9$, 試求 $\frac{5^x + 5^{-x}}{3 \times 5^x - 5^{-x}} =$ 【 】。

10. 設 a 、 b 、 c 為有理數，且 $3^{3x} = 9^y = \left(\frac{1}{81}\right)^z$, 若 $x + y + z = 14$, 則 $x =$ 【 】。

11. 已知 $64^x = 10$, 試求 $4 \times 8^{2x+1} =$ 【 】。【竹北高中】

12. 設 x 、 y 均為實數，且 $17^x = 9$, $459^y = 81$, 則 $\frac{1}{x} - \frac{2}{y}$ 的值為 【 】。【高師大附中】

13. 設 a, b 為實數，若 $(0.0025)^a = 100$ ， $(0.4)^b = 1000$ ，則 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} =$ 【 】。
14. 已知某放射性物質在 20 天前原有 1024 公克，而現在只剩下 32 公克，則此放射性物質的半衰期為【 】天。【素養題】
15. 池塘中的布袋蓮現在的面積為 30 呎方公尺，經過 6 個月之後，它會蔓延到 240 呎方公尺的範圍。若蔓延範圍增加的倍數一定，試問 10 個月後布袋蓮蔓延的範圍為【 】呎方公尺。【生活應用題】【竹北高中】
16. 某項試驗中，細菌數目 1 日後增加為 a 倍，且已知實驗開始 3 日後細菌數為 2000， $4\frac{1}{2}$ 日後細菌數為 16000；則實驗開始 5 日後細菌數為【 】。【生活應用題】【武陵高中】
17. 設室溫 30°C 下，剛出爐的麵包溫度為 $x^\circ\text{C}$ ，經過 t 分鐘後的溫度 $H^\circ\text{C}$ ，將符合牛頓提出的冷卻定律公式 $H = 25 + (x - 30) \times 1.25^{-t}$ 。設 3 分鐘後測量麵包的溫度為 50.6°C ，試求該麵包出爐時的溫度（四捨五入到整數位）。【素養題】

➤ 回家作業

$$1. (\sqrt{8})^{-\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{27} + \left(\sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{\frac{1}{8}} \right) + 1024^0 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$$

$$2. \text{化簡 } \frac{\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{3}{5}} \times \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}}{8^{-\frac{2}{3}}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。 \text{【斗六高中】}$$

$$3. \left(\frac{81}{25}\right)^{0.5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \times (0.09)^{-0.5} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。 \text{【屏東女中】}$$

4. 計算下列各式的值：

$$(1) \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times 2^{-3} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。 \quad (2) (\sqrt{3}+1)^{-4} \times (\sqrt{3}-1)^{-3} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$$

5. 試求下列各式的值：

$$(1) \frac{(14^2)^4}{(2^3 \times 7)^5} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。 \quad (2) (\sqrt{5})^5 (\sqrt{5})^3 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$$

$$6. \text{設 } a > 0, \text{ 化簡 } \sqrt[3]{a^{18}} \times \sqrt{\sqrt{a^{12}}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$$

$$7. \text{設 } a = \sqrt[3]{\sqrt{16}}, b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}, c = \sqrt[4]{2\sqrt{32}}, \text{ 則 } \frac{a^6 b}{c^8} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。 \text{【新竹女中】}$$

8. 已知 $2^{0.5} = a$ ，試以 a 表示：

$$(1) 2 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。 (2) 8 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。 (3) \frac{1}{2} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$$

$$9. \text{已知 } a^{2x} = 4, \text{ 則 } \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$$

$$10. \text{設 } a > 0, a^{0.6} = 1024, \text{ 若 } a^{0.36} = 2^k, \text{ 則 } k = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。 \text{【屏東女中】}$$

11. 設 $2^x = 4^y = 8^z = 16$ ，求 $x + y - z =$ 【 】。

12. 設服用止痛藥經過 x 小時後，殘留在身體裡的量為原來的 y 倍，其中 x 與 y 的關係式可表

示為： $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$ ，已知仔仔於今天服用一顆 8 毫克的止痛藥，則二天後殘留在仔仔身體的止痛藥為【 】毫克。【豐原高中】

13. 若 $3^{\sqrt{2}} + 3^{-\sqrt{2}} = a$ ，則 $27^{\sqrt{2}} + 27^{-\sqrt{2}} =$ 【 】。（以 a 表示）

14. 設 $a^{2x} = 4$ ，求 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^{3x} + a^{-5x}} =$ 【 】。【興大附中】

15. 已知 $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 3$ ，求 $x + x^{-1}$ 的值為【 】。【興大附中】

16. 若 $\sqrt[3]{a^{4.5} \times \sqrt{a^{-3}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{-7} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt{a}}} = a^x$ ，則 $x =$ 【 】。【臺南女中】

17. 已知 $21^x = 9$ 且 $567^y = 81$ ，則 $\frac{2}{x} - \frac{4}{y}$ 之值為【 】。【北一女中】

18. 地質學家經常使用放射性定年法來確定岩層的年代，若岩脈採用某放射性元素定年，已知該元素由母元素衰變成子元素的時間為 7 億年，且母元素與子元素之質量相同。假設子元素全來自母元素的衰變，今測定某岩脈的母元素和子元素的比例為 1:7，則該岩脈的形成年代約為【 】億年前。【武陵高中】【素養題】

19. $xyzw \neq 0$ ， a 、 b 、 c 為正整數，且 $a < b < c$ ，若 $a^x = b^y = c^z = 30^w$ ， $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w}$ ，試求 a ， b ， c 之值。【師大附中】

20. 設 $13^{2x} = 11$ ， $11^{3y} = 13$ ，則 $xy =$ 【 】。

21.過去曾因為竹苗及網路媒體的不當報導，導致衛生紙搶購風潮，各大賣場不是賣到缺貨，就是來不及補上貨架就被搶購一空。根據民眾搶購的心態，醫師分析：

原因一：民眾預期漲價和從眾心理引發，造成大家搶購。

原因二：訊息散播速度快。

假設一不實訊息散播 t 小時後，得知該訊息的人口比例為 $100(1-2^{-kt})\%$ ，且已知某不實消息散播 18 小時後，已有 36 % 的人聽過，試問 27 小時後，大約有【 】% 的人聽過此消息。（四捨五入至小數點後第一位）【臺中二中】

22.放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。已知某放射性物質重 200 克，若 3 年後剩下 50 克，則：

(1) 半衰期為【 】年。

(2) 該放射性物質剩下 25 克時，需要【 】年。【素養題】

23.設某檯燈亮度為 I 燭光且與桌面的距離為 d 公尺時，桌面表面的照度為 E 勒克斯，已知 E 與 d 的關係式為 $E=\frac{I}{d^2}$ 。設此檯燈為 120 燭光且高度為 0.5 公尺，求檯燈正下方的照度 E 。【素養題】

24.已知 $1\text{ GB}=2^{10}\text{ MB}$ ，若一部高畫質影片儲存在硬碟中大約需要 10 GB 的容量，試問 1 TB 容量的硬碟約可儲存多少部高畫質的影片？（可使用計算機輔助計算）

25.觀察某種細菌的數量，發現每過 1 小時會增加為原來的 3 倍。已知現在有此細菌 90000 隻，試問：

(1) 2 小時後有幾隻？

(2) 2 小時前有幾隻？

26. 馬祖「藍眼淚」成為近年來新興的觀光項目。藍眼淚是指一種夜光蟲（渦鞭毛藻），經過海浪及自然風的驚擾會發出淡藍色的螢光，而數量一多就會滿滿地遍佈在海上，形成一片藍色夢幻海的景象。相傳看到這種生物大量出現時，以它為食物的丁香魚群就會靠過來。海洋生物學家為了調查在馬祖當地藍眼淚的數量，研究發現，在繁殖密集時期，它們的數量會呈現以 a 為底、時間為 t 的指數成長，關係式為 $y=k \times a^t$ ，其中 y 表示藍眼淚的數量（單位：隻）， t 為經過時間（單位：天）， k 為調查起始日的數量。假設調查一天後發現，藍眼淚的數量有 5000 隻，從開始調查經過三天後發現有 20000 隻。

(1) 試求 a 和 k 的值。

(2) 試求從開始調查經過五天後，藍眼淚的數量會有多少隻？【素養題】

27. 設服用一顆止痛藥經過 h 小時後，殘留在身體裡的藥量為原來的 y 倍的關係式為 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}$

。試求當殘留的藥量為低於或等於原來的 $\frac{1}{64}$ 倍時稱為代謝完成，試求服用一顆止痛藥至少需要幾小時才能代謝完成？【素養題】

28. 已知池塘中的布袋蓮現在的面積為 10 呎方公尺，假設布袋蓮的面積每 3 個月均蔓延成原來的 k 倍，若 6 個月後布袋蓮的面積為 360 呎方公尺，則從現在起到 9 個月後布袋蓮蔓延的面積為多少呎方公尺？