

數線&絕對值

➤ 分點公式：

設 $A(a)$ 、 $B(b)$ 為數線上兩相異點，若 P 點介於 A 、 B 兩點之間且 $\overline{AP} : \overline{BP}$

$= m : n$ ，則 P 點的坐標為 $\frac{na+mb}{m+n}$ 。

➤ 數線上標出範圍

1. 數線上標出範圍，舉例如下：

(1) $x=2$ 代表一點。

(2) $x > 2$ 表示一條由 2 向右的射線，但是 2 標上空心點，表示不含這一點。

(3) $x < 2$ 表示一條由 2 向左的射線，但是 2 標上實心點，表示包含這一點。

(4) $-1 < x < 2$ 表示一線段，左端點為 -1（包含這點），右端點為 2（不含這點）。

2. 在表示數線上的範圍時，也可以使用小括弧（ ），中括弧 [] 來表示區間的符號，現在定義如下：

設 a 、 b 為實數且 $a < b$ 。我們將數線上的範圍

(1) $a \leq x \leq b$ 記為 $[a, b]$ 。

(2) $a \leq x < b$ 記為 $[a, b)$ 。

(3) $a < x \leq b$ 記為 $(a, b]$ 。

(4) $a < x < b$ 記為 (a, b) 。

(5) $x \geq a$ 記為 $[a, \infty)$ 。

(6) $x > a$ 記為 (a, ∞) 。

(7) $x \leq a$ 記為 $(-\infty, a]$ 。

(8) $x < a$ 記為 $(-\infty, a)$ 。

➤ 絕對值

1. 絕對值的定義：實數 a ，規定：

(1) 若 $a \geq 0$ ，則 $|a| = a$

(2) 若 $a \leq 0$ ，則 $|a| = -a$

2. 絕對值的內涵：一個實數 a 取絕對值，及數線上該實數的點 $A(a)$ 到原點的距離。

3. 兩數相減的絕對值：數線上點 $A(a)$ 與 $B(b)$ ，則 $|a - b|$ 代表 A 、 B 兩點間的距離。

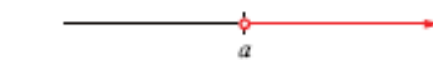
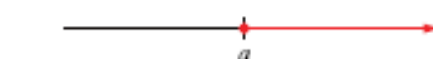
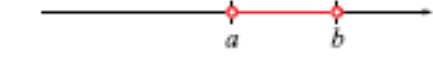
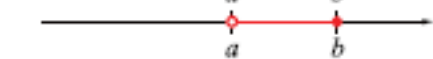
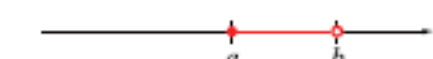
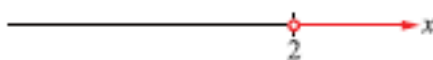
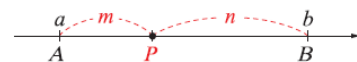
4. 絕對值的性質： x 、 y 為實數， n 為正整數，則

(1) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(2) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

(3) $|x^n| = |x|^n$

(4) $|x + y| \leq |x| + |y|$ ，在 $xy \geq 0$ 時等號會成立，稱為三角不等式



5. 絕對值方程式：未知數出現在絕對值內的方程式。

如 $|x + 2| = 5$ ， $x^2 + |x| - 6 = 0$ 。

6. 絕對值不等式：未知數出現在絕對值內的不等式。

如 $|x + 2| < 5$ ， $|x - 3| + |2x + 6| \geq 7$ 。

注意！ 解不等式必須把滿足的 x 範圍完整寫出來，這樣才算正確。

7. 簡單的絕對值方程式、不等式，可以直接把絕對值去掉，規則如下，設 a 為正數：

(1) 若 $|x| = a$ ，則 $x = \pm a$

(2) 若 $|x| < a$ ，則 $-a < x < a$

(3) 若 $|x| > a$ ，則 $x > a$ or $x < -a$

(4) 若 $|x| = |y|$ ，則 $x = \pm y$

8. 複雜的絕對值方程式、不等式必須用「分段討論」來求解。

➤ 分點公式練習題

1. 數線上有 A 、 B 兩點，坐標分別為 -6 、 9 ，在數線上有另一點 C 使得 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 3$ ，則 C 點坐標為【 】。

2. 已知在數線上有 $A(-2)$ 、 $B(5)$ 、 $P(x)$ 三點，若 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$ ，則 $x =$ 【 】。【松山高中】

3. 辰祐利用暑假想從 臺南 騎單車到 高雄 遊玩，預計自台 17 線 150 公里處南下到 250 公里處，若想在整個路程的 $\frac{3}{5}$ 處用餐休息，則必須在台 17 線【 】公里處停下來休息。
【素養題】

4. 試比較下列三數的大小： $\frac{3\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{10}$ ， $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ ， $\frac{17\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{20}$ 。

5. 設 a 、 b 為有理數且 $a < b$ ，則下列何者正確？

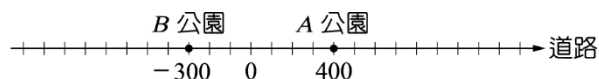
- (A) $a < \frac{2a+b}{3} < \frac{a+2b}{3} < b$ (B) $a < \frac{3a+b}{4} < \frac{a+3b}{4} < b$ (C) $a < \frac{3a+b}{5} < \frac{a+3b}{5} < b$
 (D) $a < \frac{3a+2b}{5} < \frac{2a+3b}{5} < b$ (E) $a < \frac{4a+3b}{7} < \frac{3a+4b}{7} < b$ 。

➤ 數線練習題

1. 將下列數線上的範圍以區間符號表示：

- (1) $-5 \leq x < -3$ 。 (2) $x \geq -2$ 且 $x \leq 0$ 。 (3) $x < -1$ 或 $x \geq 4$ 。 (4) $x \leq 1$ 或 $x > 5$ 。

2. 已知一道路上有 A 、 B 兩公園，其相關位置可以用數線表示如圖。今小菡想在此道路上購屋且希望住家附近 600 公尺內有公園，請幫她在圖中的數線上找出住家位置適合的範圍並將範圍以區間表示。



3. 設實數 a 、 b 滿足 $-1 < a < 4$ ， $-3 < b < 1$ ，則下列選項哪些必為真？

- (A) $-4 < a+b < 5$ (B) $2 < a-b < 3$ (C) $-3 < 2a-b < 11$
 (D) $-12 < ab < 4$ (E) $0 < a^2 + b^2 < 25$ 。

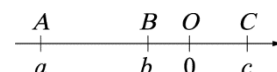
4. 在數線上，甲從點 -8 開始做等速運動，同時乙也從點 10 開始做等速運動，乙移動的速率是甲的 a 倍，且 $a > 1$ 。試選出正確的選項。

- (A) 若甲朝負向移動而乙朝正向移動，則他們會相遇
 (B) 若甲朝負向移動且乙朝負向移動，則他們不會相遇
 (C) 若甲朝正向移動而乙朝負向移動，則乙先到達原點 0
 (D) 若甲朝正向移動且乙朝正向移動，則他們之間的距離會越來越大
 (E) 若甲朝正向移動而乙朝負向移動，且他們在點 -2 相遇，則 $a=2$ 。【108.學測】

➤ 絕對值練習題

1. 設 x 是實數且滿足 $|7-3x|=2$ ，則 x 的值為【 】。【嘉義女中】

2. 如圖，數線上點 A 、 B 、 C 的坐標分別依序是 a 、 b 、 c ，試求 $|a-b| - |b-c| + |a-c| - |a+b| + \sqrt{a^2} - |c| =$ 【 】。(註： O 是原點)【鳳山高中】



3. 解方程式 $|x-3| + |x+4| = 19$ 。【高雄女中】

4. 解方程式 $3|x-1| - 2|x+2| = 1$ 得 $x =$ 【 】。【臺中二中】

5. 設 x 為實數，則 $2x + |x - 1| = 5$ 的解為【 】。【豐原高中】

6. 試求滿足 $|-3x + 9| > 30$ 之 x 的範圍為【 】。【高雄女中】

7. 滿足不等式 $1 < |2x - 3| < 7$ 的整數 x 有【 】個。【臺中一中】

8. 不等式 $|x - 1| + |x - 2| \leq 4$ 之解為【 】。

9. 已知 a, b 為實數，若 $|ax - 4| > b$ 之解為 $x > 15$ 或 $x < 1$ ，則 $a + b =$ 【 】。

10. 如圖，某太陽餅營養標示中的重量為 $100\text{g} \pm 5\text{g}$ ，假設商品實際重量為 x 公克，且 x 滿足的絕對值不等式 $|x - a| \leq b$ ，則 $a + b =$ 【 】。【素養題】

營 養 標 示	
每一份	100 g $\pm$ 5 g
本包裝含	1 份
每份	
熱量	422.5 大卡
蛋白質	4.2 公克
脂肪	20.8 公克
飽和脂肪	0.3 公克
反式脂肪	0.0 公克
碳水化合物	55 公克
糖	24 公克
鈉	10 毫克

11. 馬拉松要跑得好，適當補給不能少。在馬拉松比賽，根據 IAAF 規定，10 公里內的賽事可以只提供飲用水，超過 10 公里的項目，除了提供飲用水，應另外供給其他飲品、食品。通常每 2~3 公里會設置一補給站。

假設一賽事路線為一直線 (x 軸)，已知在 $x=9.43$ 的位置為一補給站，且在補給站的前後 2.5 公里內可替選手 (x) 補給能量所需，則：

(1) 列出 x 的關係式，並解出 x 的範圍。

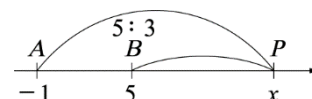
(2) 下列哪個選項的位置可得到補給站的補給？

(A) $x=3$ (B) $x=4$ (C) $x=5$ (D) $x=6$ (E) $x=7$ 。【素養題】

12. 設 x 為實數，則 $|x+1| + |x| + |x-3| + |x-4|$ 的最小值為【 】。

➤ 回家作業

1. 數線上， $A(-1)$ ， $B(5)$ ，點 $P(x)$ 滿足 $\overline{AP} : \overline{BP} = 5 : 3$ ，但在 $\overline{AB}$ 外，則 $x =$ 【 】。【高雄女中】



2. 數線上兩點 A 、 B 的坐標分別為 -2 、 b ，點 C 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 3$ ，若已知點 C 的坐標為 10，則 b 的值為【 】。

3. r 、 s 均為實數， $r < s$ ， $a = \frac{r+3s}{4}$ ， $b = \frac{r+5s}{6}$ ， $c = \frac{5r+s}{6}$ ，則 a 、 b 、 c 的大小次序為【 】。

4. 甲、乙兩人分別位於高鐵站的西方 6 公里、東方 21 公里處，今兩人同時開著車以等速在東西方向上移動，若甲、乙的速率比為 4 : 5，且已知他們會相遇，則他們會在距離高鐵站【 】公里的地方相遇。(有兩解)

5.如圖，白井警官在路上執行勤務時，接獲通報指出在他的東方 10 公里處有一家銀樓發生搶案，並在通報同時，搶匪正騎著偷來的賊車朝著東方等速度逃逸。此時 白井 警官有以下兩種立即追緝搶匪的方案：

方案一：白井 警官立即從原地騎乘警用機車，並以搶匪逃逸速率的 1.5 倍等速度向東方追緝。

方案二：白井 警官先從原地騎乘警用機車，並以搶匪逃逸速率的 1.5 倍等速度向西方移動到距離 6 公里遠的警局，並立即坐上同事 目向 警官的警用汽車，並以搶匪逃逸速率的 3 倍等速度向東方追緝。



試回答下列各題：

(1) 若 白井 警官採取方案一，則可在距離案發的銀樓東方幾公里處逮捕到搶匪？

(2) 若 白井 警官採取方案二，是否可比方案一更快速捕到搶匪？【素養題】

6.() 設 a 、 b 為有理數且 $a < b$ ，則下列何者正確？

(A) $a < \frac{6a+3b}{9} < \frac{a+2b}{3} < b$ (B) $a < \frac{3a+b}{4} < \frac{2a+6b}{8} < b$ (C) $a < \frac{3a+b}{5} < \frac{a+3b}{5} < b$ (D)

$a < \frac{a+b}{2} < \frac{3a+2b}{5} < b$ (E) $a < \frac{4a+3b}{7} < \frac{3a+4b}{7} < b$ 。【三民高中】

7.() 設 a 與 b 為實數，且 $a < b$ ，則下列哪些選項正確？

(A) $a < \frac{a+b}{2} < b$ (B) $a < \frac{6a-b}{5} < b$ (C) $a < \frac{2a+2b}{5} < b$

(D) $\frac{a+b}{2} < \frac{a+2b}{3}$ (E) $\frac{2a+b}{3} < \frac{3a+2b}{5}$ 。【臺南女中】

8.將下列數線上的範圍以區間符號表示：

(1) $-5 < x \leq 6$ 。 (2) $x \geq -1$ 且 $x \leq 3$ 。 (3) $x < -4$ 或 $x \geq 1$ 。 (4) $x \leq 2$ 或 $x \geq 3$ 。

9.設 x 是實數且滿足 $|5-2x| = 7$ ，則 x 的值為【 】。【鳳山高中】

10.已知 $a < b$ ，則 $|a-b-3| - |b-a+2| =$ 【 】。

11.數線上有三點 A ， B ， C ，其中 A 點坐標為 -4 ， B 點坐標為 5 ，若 $\overline{AC} = 6$ ，則 $\overline{BC} =$ 【 】。

12. 解下列各方程式：

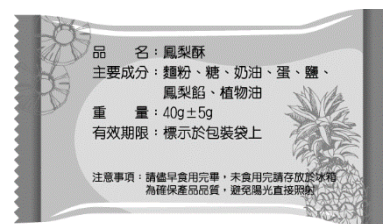
(1) 設 $|x+2| = 3$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 設 $|2x-1| = 5$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 若不等式 $|ax+2| \geq b$ 的解為 $x \leq 2$ 或 $x \geq 8$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 某包食品包裝上標示重量為 $800 \text{ 克} \pm 5\%$ (含)，已知此包食品符合標示重量且其重量為 x 克，而 x 的範圍恰可表示為 $|x-a| \leq b$ ，試求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【素養題】

15. 某鳳梨酥包裝標示重量為 $40\text{g} \pm 5\text{g}$ ，若假設商品實際重量為 x 公克，且 a, b 滿足 $|x-a| \leq b$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



16. 設 a, b 為實數，已知 $|2x+a| \leq b$ 的解為 $-3 \leq x \leq 8$ ，求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
【新北高中】

17. 滿足不等式 $|3x+1| < 5$ 的整數 x 值共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個。【中山女高】

18. 試求滿足 $3 < |3x-2| \leq 8$ 之 x 範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

19. 設 $|x-1| + |x-2| = 4$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

20. 設 $|2x-1| = |x+3|$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

21. 郊區一筆直的路段設有水廠 A 與電廠 B 各一座，其坐標為 $A(-2)$ 、 $B(4)$ ，為了回饋沿路居民，水電的基本費計算方式為：「住戶到電廠距離的 3 倍加上該住戶到水廠的距離和為該用戶的水電基本費。」今設路段住戶 P 坐標 x ，則該路段基本費不超過 22 元的區域範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。【生活應用題】【臺中女中】

22. 不等式 $|x+2| + 2|x-5| \leq 22$ 的解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。【松山高中】

23. 解不等式： $1 \leq |2x-1| < 3$ ，範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。【三民高中】