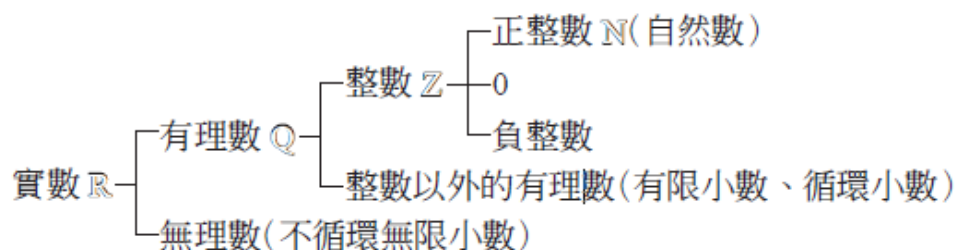


數的分類

➤ 數系：



➤ 實數：

1. 定義：有理數與無理數合起來稱為實數。能在數線上找到代表的點的數皆為實數，數線上每一點都代表一個實數，以符號“R”表示。
2. 實數與三一律：有理數與無理數統稱為實數，其所對應的點填滿了整條數線，任兩個實數 a 與 b ，則 $a > b$ 、 $a = b$ 、 $a < b$ 三者必恰有一個成立，稱為「三一律」。
3. 數系及其代號：
 - (1) 全體自然數(即正整數)用 N 表示，如「3為自然數」記為 $3 \in N$ 。而 $0 \notin N$ 。
 - (2) 全體整數用 Z 表示，如「0為整數」記為 $0 \in Z$ 。而 $\frac{3}{2} \notin Z$ 。
 - (3) 全體有理數用 Q 表示，如「 $\frac{3}{2}$ 為有理數」記為 $\frac{3}{2} \in Q$ 。而 $\sqrt{2} \notin Q$ 。
 - (4) 全體實數用 R 表示，如「 $\sqrt{2}$ 為實數」記為 $\sqrt{2} \in R$ 。
 - (5) 實數加法與乘法的性質： $a, b \in R$ ，則有：
 - (1) 交換律： $a + b = b + a$ ， $a \times b = b \times a$ 。
 - (2) 結合律： $(a + b) + c = a + (b + c)$ ， $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ 。
 - (3) 分配律： $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ 。

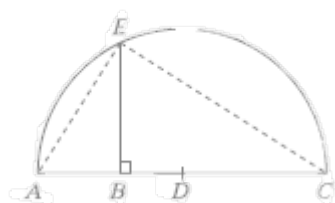
➤ 有理數：

1. 定義：可以表示成兩個整數相除的數，即形如 $\frac{m}{n}$ 的數（其中 m, n 為整數且 $n \neq 0$ ），稱為有理數，以符號 Q 表示。
2. 有理數的運算：兩有理數的加、減、乘、除，結果仍是有理數（規定不可以除以0）。
3. 有理數的小數表示：
 - (1) 有限小數：
 - (2) 循環小數：
4. 有理數的稠密性：任意兩個有理數之間有無限多個有理數，因此有理點在數線上是非常

稠密的，這個性質稱為有理數的稠密性。

➤ **無理數：**

1. 定義：不能寫成 $\frac{m}{n}$ （ $m、n$ 是整數， $n \neq 0$ ）的形式之數稱為無理數。
2. 無理數化成小數：每一個無理數化成小數後，都是不循環的無限小數。
3. 無理數作圖：



➤ **實數練習題**

1. 有關有理數和無理數的概念，下列敘述何者正確？

- (A) 無理數與無理數相加，其和必為無理數
- (B) 有理數與無理數相加，其和必為無理數
- (C) 有理數與無理數相乘，可能是有理數
- (D) 無理數與無理數相乘，可能是有理數
- (E) 任意兩個有理數之間，沒有任何的無理數。

2. 下列選項何者正確？

- (A) 若 $a+b$ 為無理數，則 a, b 至少有一為無理數
- (B) 若 $a-b, a+b$ 為有理數，則 a, b 都是有理數
- (C) 若 $a-b, a+b$ 是無理數，則 a, b 都是無理數
- (D) 若 a^4 和 a^2 均為有理數，則 a 必為有理數
- (E) 若 a^8 和 a^5 均為有理數，則 a 必為有理數。

3. $a、b$ 為整數，且 $\sqrt{(a-1)^2} + 2|b+1| = 4$ ，則數對 (a, b) 共有_____組

4. 已知 $a = 4 - \sqrt{3}$ ， $b = \sqrt{12} - \sqrt{7}$ ， $c = \sqrt{14} - \sqrt{5}$ ，請寫出 a, b, c 的大小關係，並由大到小排列為【 】。

5. 愛因斯坦認為極大的飛行速度會使得飛行物體的時間減慢，並提出：「太空人以光速的 x

倍 ($0 < x < 1$) 進行 t 年的太空旅行 (太空人老了 t 歲)；旅行結束後返回地球，地球上已

經過了 $\frac{t}{\sqrt{1-x^2}}$ 年 (地球上的人老了 $\frac{t}{\sqrt{1-x^2}}$ 歲)。」某年， A 太空人 29 歲，他有位 3 歲的兒

子。此年，該太空人以光速的 $\frac{4}{5}$ 倍進行 t 年的太空旅行；旅行結束後返回地球，太空人發

現他跟兒子的年紀竟然一樣。試問，根據上述理論， A 太空人旅行了【 】年。

【興大附中】【素養題】

6. 若 a 是正實數， a 的小數部分是 b ， $a^2 + b^2 = 40$ ，則 a 的值為多少？【師大附中】

➤ 分數與小數轉換

1. 將下列有理數化為小數：

(1) $\frac{27}{25} =$ 【 】 (2) $\frac{1}{8} =$ 【 】。

2. 將下列有理數化為小數：

(1) $\frac{7}{18} =$ 【 】。 (2) $\frac{3}{7} =$ 【 】。

3. 將下列循環小數化為有理數 (約分至最簡分數)：

(1) $0.\overline{26} =$ 【 】。 (2) $0.3\overline{27} =$ 【 】。

4. 若分數 $\frac{315a21}{24}$ 可化為有限小數，則 a 之值有【 】組解。【三民高中】

5. 設 a 是 0 到 9 的整數，且 $\frac{12}{99} < 0.1\overline{a2} < \frac{13}{99}$ ，則 $a =$ 【 】。

6. 小明某日因精神不濟，將一正數「乘以 $0.\overline{4}$ 」誤計算為「乘以 0.44」，導致所得結果相差 2，則此正數應為 【 】。

➤ 無理數練習

1. 已知 x, y 是有理數，且 $(1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 2$ ，試求 $x + y =$ 【 】。

2. 設 a, b 為有理數，且已知 $\sqrt{3}$ 是無理數，若 $(\sqrt{3} + 1)a + (2 - \sqrt{3})b = 7 - 2\sqrt{3}$ ，則數對 $(a, b) =$ 【 】。

3. 試比較下列實數大小，並由大到小排列：

$a = \sqrt{13} + \sqrt{5}$ ， $b = \sqrt{11} + \sqrt{7}$ ， $c = \sqrt{15} + \sqrt{3}$ 。（可使用計算機輔助作答）

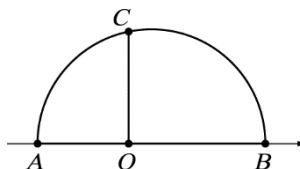
4. 試求 $\left(-\sqrt{\frac{16}{7}}\right) \times \left(-\sqrt{\frac{25}{24}}\right) \div \sqrt{\frac{7}{18}} =$ 【 】。

5. $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ，求 $x^4 - \frac{1}{x^4} =$ 【 】。【武陵高中】

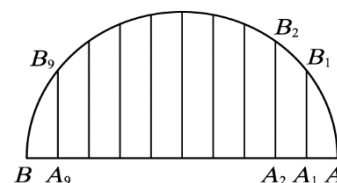
6. 設 $a = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ， $b = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ，試求 $a^3 + b^3$ 之值為【 】。

7. 試在數線上畫出 $\sqrt{6}$ 的坐標位置。

解：



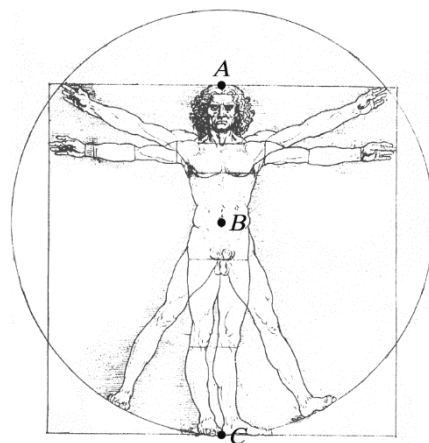
8. 如圖，有一半圓形拱橋，橋面位置恰為直徑 $\overline{AB}$ 。為了慶祝活動的裝飾，計劃將橋面 $\overline{AB}$ 十等分後（也就是 $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \dots = \overline{A_8A_9} = \overline{A_9B}$ ），在每個等分點豎立一個鋼柱， $\overline{A_1B_1}$ ， $\overline{A_2B_2}$ ， $\dots$ ， $\overline{A_9B_9}$ 。已知 $\overline{AB} = 10$ 公尺，試求 $\overline{A_3B_3} =$ 【 】公尺。【生活應用題】【北一女中】



9. 如圖，古希臘認為最美的身材比例要滿足 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$ （ A 為頭頂， B 為肚臍， C 為地面站立處），這個比值稱為黃金比例 ϕ ，試求：

(1) 黃金比例 ϕ 。

(2) 設周小姐的身高為 162 公分，她的肚臍到腳底的距離為 97 公分。請問周小姐要穿高多少公分的鞋子可使身材比例符合黃金比例？（四捨五入至整數位，可使用計算機輔助計算）



➤ 回家作業

1. 將下列有理數以小數表示：

(1) $\frac{17}{4} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。 (2) $\frac{2}{7} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。 (3) $\frac{7}{75} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

2. 將下列小數化為最簡分數：

(1) $0.476 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。 (2) $2.\overline{37} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。 (3) $0.2\overline{78} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

3. 將下列循環小數化為有理數（約分至最簡分數）：

(1) $0.\overline{14} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

(2) $2.3\overline{56} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

4. 試將下列小數化為最簡分數：

(1) $0.04\overline{5}$ 。

(2) $1.23\overline{4}$ 。

5. 設 a 為 1 至 9 的正整數，且 $\frac{13}{99} < 0.1\overline{a2} < \frac{14}{99}$ ，則 $a = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。【臺中一中】

6. 若分數 $\frac{15a21}{24}$ 可化為有限小數，則 a 的值有 $\text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 個解。（註： a 為五位數 15a21 的百位數字）

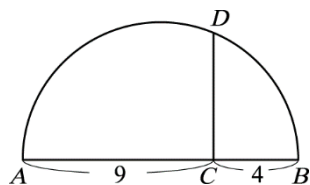
7. 試以有理數（最簡分數）表示 $1.\overline{54} + 0.8\overline{3} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

8. 小江某日執行一計算，因精神不濟，將一正數「乘以 $0.\overline{5}$ 」，誤計算為「乘以 0.55」，導致所得結果相差 3，則此正數應為 $\text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。【臺中一中】

9. 設 x 、 y 是有理數，若 $(2 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y = 8 - 2\sqrt{3}$ ，則數對 $(x, y) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

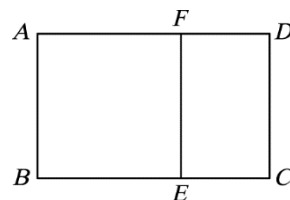
10. 設 a 、 b 為有理數，且已知 $\sqrt{3}$ 是無理數，若 $(\sqrt{3} + 1)a + (2 - \sqrt{3})b = 7 - 2\sqrt{3}$ ，則數對 $(a, b) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

11. 如圖，在以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓中， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，已知 $\overline{AC} = 9$ ， $\overline{BC} = 4$ ，試求 $\overline{CD} = ?$



12. 設 x, y 均為有理數，滿足 $(2x - y) + \sqrt{5}(3x - y + 5) = 0$ ，則數對 $(x, y) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

13. 如圖，矩形 $ABCD$ 切掉正方形 $ABEF$ 後，剩下的矩形 $ECDF$ 形狀與矩形 $ABCD$ 相似，我們稱此為黃金矩形，試求黃金矩形的長 $\overline{AD}$ 與寬 $\overline{AB}$ 的比值。



14. 設 $a + b$ 與 $a - b$ 都是有理數，請問 a 與 b 都是有理數嗎？

15. 已知 $a = 4 - \sqrt{3}$ ， $b = \sqrt{12} - \sqrt{7}$ ， $c = \sqrt{14} - \sqrt{5}$ ，請寫出 a, b, c 的大小關係，並由大到小排列為 $\text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

16. 已知實數 x, y 滿足 $|x + y - 2| + (2x - y - 7)^2 = 0$ ，求 x, y 的值

17. 下列哪一個數無法化為有限小數？ (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{19}{40}$ (C) $\frac{10}{27}$ (D) $\frac{17}{2^3 \times 5^2}$ 。

18. 下列哪些有理數可表示為有限小數？ (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{7}{8}$ (E) $\frac{27}{15}$ 。

19. 已知 $a^{2012} \in Q$ ，則再搭配下列哪些條件之後，我們可以確定 a 也是有理數？
(A) $a^2 \in Q$ (B) $a^3 \in Q$ (C) $a^4 \in Q$ (D) $a^5 \in Q$ (E) $a^6 \in Q$ 。

20. 下列選項，哪些是正確的？

- (A) 若 a, b 均為有理數，則 $a+b$ 亦為有理數
- (B) 若 a, b 均為無理數，則 $a+b$ 亦為無理數
- (C) 若 a 為有理數， b 為無理數，則 $a+b$ 為無理數
- (D) 若 a, b 均為無理數，則 ab 亦為無理數
- (E) 設 a, b 均為有理數， $a, b \neq 0$ ，則 $a+b\sqrt{2}$ 必為無理數。

21. 下列選項哪些正確？

- (A) 若 $a < b$ 且 a, b 為整數，則至少存在一整數 c 滿足 $a < c < b$
- (B) 若 $a, b, a-b$ 均為無理數，則 $a+b$ 為無理數
- (C) 若 a^7 為有理數，且 a^{11} 為有理數，則 a 為有理數
- (D) 設 a, b 是實數，若 $a+b\sqrt{5}=0$ ，則 a, b 均為 0
- (E) 對任意實數 x ， $\frac{5}{3} \leq \frac{5+x^2}{3+x^2}$ 恆成立。

22. 設 a, b 為實數，若 $a^2+4b^2=10$ ，求 $(a+2b)^2$ 的最大值為多少？

23. 設 $x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ，則 $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ 【 】。

24. 試化簡 $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}} =$ 【 】。【臺南女中】

25. 已知 $a = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ，則：

(1) $a + \frac{1}{a} =$ 【 】。 (2) $a^2 + \frac{1}{a^2} =$ 【 】。

26. 設 $a = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ ， $b = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$ ，試求 $a^3 - b^3 =$ 【 】。

式的運算

➤ 二次乘法公式：

1. 平方差： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。
2. 兩項和完全平方： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。
3. 兩項差完全平方： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。
4. 三項和完全平方： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ 。

➤ 三次乘法公式：

1. 兩項和完全立方： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
2. 兩項差完全立方： $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

3. 立方和： $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
4. 立方差： $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

➤ 雙重根號化簡： $\sqrt{a+b \pm \sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

➤ 算幾不等式： $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

➤ 乘法公式練習題

1. 利用乘法公式計算下列各式：

$$(1) \frac{176^2}{138^2 - 38^2} = \text{【 } \quad \quad \text{】} \quad \quad (2) 199^2 = \text{【 } \quad \quad \text{】}。$$

2. 設 a 、 b 、 c 均為實數，且 $a+b+c=7$ ， $ab+bc+ca=\frac{5}{2}$ ，則 $a^2+b^2+c^2=\text{【 } \quad \quad \text{】}。$

3. 利用乘法公式，因式分解下列各式：

$$(1) x^3+8 \quad \quad (2) 8x^3-1 \quad \quad (3) 8x^3+12x^2+6x+1$$

4. 將下列各式因式分解：

$$(1) x^3-8y^3 = \text{【 } \quad \quad \text{】} \quad \quad (2) x^4-y^4 = \text{【 } \quad \quad \text{】}。$$

$$(3) x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3 = \text{【 } \quad \quad \text{】}。$$

5. 設 $a+b=3$ ， $ab=1$ ，試求下列各式的值：

(1) $a^2 + b^2 =$ 【 】 (2) $a^2 - b^2 =$ 【 】

(3) $a^3 + b^3 =$ 【 】 (4) $a^4 + b^4 =$ 【 】。

6. 已知實數 x, y 滿足 $x-y=\sqrt{2}$ ， $x^2+y^2=8$ ，試求下列各式的值：

(1) $xy =$ 【 】。 (2) $x^3 - y^3 =$ 【 】。

7. 已知 $x + \frac{1}{x} = 5$ ，試求下列各式之值：

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ 【 】。 (2) $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ 【 】。

8. 設 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，試求下列各式的值：

(1) $x + \frac{1}{x} =$ 【 】。 (2) $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ 【 】。【北一女中】

9. (已知 $x > 0$ ，化簡 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2}$ 。

➤ 雙重根號練習題

1. 試化簡下列雙重根式：

$$(1) \sqrt{9+2\sqrt{14}} = \text{【 } \quad \quad \text{】}^\circ \quad (2) \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \text{【 } \quad \quad \text{】}^\circ$$

$$(3) \sqrt{7+\sqrt{48}} = \text{【 } \quad \quad \text{】}^\circ \quad (4) \sqrt{5-\sqrt{21}} = \text{【 } \quad \quad \text{】}^\circ$$

2. 化簡以下雙重根式：

$$(1) \sqrt{9+2\sqrt{14}}^\circ \quad (2) \sqrt{11-2\sqrt{28}}^\circ$$

3. 設 x, y 均為有理數，若 $x + \sqrt{16-2\sqrt{48}} = 3 + y\sqrt{4+\sqrt{12}}$ ，則數對 $(x, y) =$
 【 】。

4. 設 a, b 為非零之有理數，若 $\frac{a}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} = b + 6\sqrt{2}$ ，則 a 之值為 **【 】**， b 之值為
 【 】。【臺南女中】

5. 實數 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，試求 b 的值。

6. 實數 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，試求 $\frac{1}{b} + \frac{7}{a+b}$ 的值。

7.展開並化簡下列各式：

(1) $(3a-2b)^3 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

(2) $(2x+3)(4x^2-6x+9) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

(3) $(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)(a^2+2a+4) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

8.設 $a+b+c=-6$ ， $a^2+b^2+c^2=14$ ，則 $ab+bc+ca = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

9.設 $x、y$ 是實數，若 $x+y=6$ ， $xy=4$ ，則 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

10.設實數 x, y 滿足 $x+y=3$ ， $x^2+y^2=5$ ，試求 x^3+y^3 的值。

➤ 算幾不等式練習題

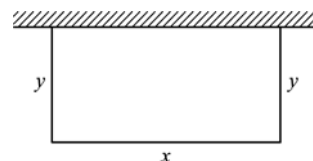
1.已知正實數 x, y 滿足 $xy=96$ ，則當 $(x, y) = (a, b)$ 時， $6x+y$ 有最小值 m ，則序組 $(a, b, m) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。【屏東女中】

2.已知 $a>0, b>0$ 且 $a+2b=4$ ，則數對 $(a, b) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 時， ab 有最大值 $\text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

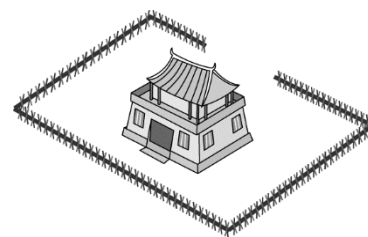
3.設 $a、b$ 是正實數，試求 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的最小值為 $\text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

4. 設 $a > 0$ ，試求 $a + \frac{9}{a} + 4$ 的最小值為【 】，及此時 $a =$ 【 】。【鳳山高中】

5. 用一條長 40 公尺的繩子在河邊圍一矩形草地（只圍三邊，靠河那邊不圍），則此矩形草地的最大面積為【 】平方公尺。



6. 孫子兵法中說到「圍師必闕」，意思是包圍敵人要留缺口，現以矩形拒馬來包圍一個城池模型，並在北方留下 1 公尺寬的缺口，如模型示意圖。已知包圍的拒馬總長為 5 公尺長，則所圍成之最大面積為【 】平方公尺。【素養題】



7. 設直角三角形 ABC 的面積為 9 平方公尺且 $\angle C = 90^\circ$ 。我們令 $\overline{BC} = a$ 公尺， $\overline{AC} = b$ 公尺。

(1) 請寫出 a, b 所滿足的關係式，並將 $\triangle ABC$ 的周長用 a, b 表示出來。

(2) 承(1)，試求 $\triangle ABC$ 的周長之最小值，並問在 a, b 為何數時產生最小值。【新竹高中】

➤ 回家作業

1. 將下列各式化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。 \quad (2) \sqrt{11+\sqrt{72}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$$

$$(3) \sqrt{28-10\sqrt{3}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。 \quad (4) \sqrt{2+\sqrt{3}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$$

2. 化簡以下雙重根式：

$$(1) \sqrt{11-\sqrt{96}}。 \quad (2) \sqrt{3+\sqrt{5}}。$$

3. 實數 $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，試求 $\frac{1}{b} + \frac{2}{a+b} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$

4. 若 $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ($0 < b < 1$)，化簡 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{1-b} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$ 【臺中二中】

5. 設 $a = \frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ ， $b = \sqrt{9-2\sqrt{20}}$ ， $c = \sqrt{10}-3$ ，則 a, b, c 的大小關係為【 $\quad \quad \quad$ 】。【豐原高中】

6. x, y 均為有理數，若 $x + \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 3 + y\sqrt{7+2\sqrt{12}}$ ，則數對 $(x, y) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$ 【臺南女中】

7. 試將下列各式因式分解。

$$(1) x^3 - 8。 \quad (2) 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1。$$

8. 試將下列各式因式分解：

$$(1) a^3 + b^6 \quad (2) 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 \quad (3) 81 - x^8。$$

9. 若實數 x 滿足 $x + \frac{1}{x} = 4$ ，試求 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}。$ 【新竹高中】

10. 已知 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，試求：

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ 【 】。
 (2) $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ 【 】。

11. 已知 $a = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ，則：

(1) $a + \frac{1}{a} =$ 【 】。
 (2) $a^2 + \frac{1}{a^2} =$ 【 】。

12. 已知 $0 < x < 1$ ，化簡 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2$ 。

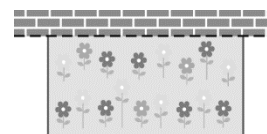
13. 若 $x > 1$ ，求 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2 = ?$

14. 設 a, b 是正實數，化簡 $\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2}$ 。

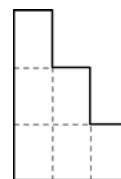
15. 設 $x > 0, y > 0$ ，且 $x + 2y = 8$ ，則 xy 之最大值為【 】，此時數對 $(x, y) =$ 【 】。

16. 設 $x > 0, y > 0$ ，且 $xy = 10$ ，則 $5x + 2y$ 之最小值為【 】，此時數對 $(x, y) =$ 【 】。

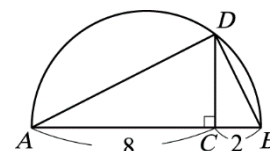
17. 阿土伯想要用鐵絲網沿牆邊（只圍三邊，靠牆的一邊不圍）圍成一個面積 100 平方公尺的長方形花園（參考如圖），則他所準備的鐵絲網至少需要【 】公尺。



18. 小芬想用鐵絲圍出如圖的一塊鋸齒形狀的區域，且此區域若按照虛線可分為面積相等的六塊長方形，但小芬只有 100 公分的鐵絲可用，則可以圍出最大的面積為【 】平方公分。



19. 如圖，在以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓中， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，已知 $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BC} = 2$ ，試求 $\triangle ABD$ 的面積。



20. 如圖，有一塊斜邊長為 12 公尺的等腰直角三角形形狀的花圃，今欲在此花圃中挖出一個面積最大的矩形水池，且水池的一邊是在三角形的斜邊上，則此水池的最大面積為【 】平方公尺。（提示：設 $\overline{AD} = a$ 公尺， $\overline{DG} = b$ 公尺）

