

單元一 數與式

概念 1

分數化成小數：最簡分數 $\frac{b}{a}$ 化成小數，若分母沒有 2、5 以外的質因數，則 $\frac{b}{a}$ 可化為有限小數，否則就是無限循環小數。

例 1： (1) 將 $\frac{10}{7}$ 寫成循環小數為_____。(2) 化為小數後第 40 位數的值為_____。

例 2：已知 a 為不大於 10 的正整數，且 $\frac{32+a}{720}$ 可以化成有限小數，則 $a =$ _____。

概念 2

循環小數化成分數：利用解方程式把循環小數化成分數。

例 1：把循環小數 $0.06\overline{45}$ 化成最簡分數為_____。

概念 3

數系構造：在數線上能找到的數都是實數，且實數皆有稠密性。實數分為有理數和無理數，其中：

1. 有理數： (1) 必可寫成有限小數或循環小數
(2) 封閉性：任意兩個有理數加、減、乘、除的結果，仍為有理數。
2. 無理數：不是有理數的數，稱為無理數。

例 1：設 a 、 b 、 c 為有理數， x 、 y 為無理數，下列推論哪些為真？

- (A) $ab + c$ 必為有理數 (B) $x + y$ 必為無理數
(C) $a + x$ 必為無理數 (D) ax 必為無理數

例 2：設 $a = \sqrt{7 + \sqrt{47}}$ ，則 a 在哪兩個連續整數之間？_____

- (A) 0 與 1 (B) 1 與 2 (C) 2 與 3 (D) 3 與 4 (E) 4 與 5

例 3：試問下列敘述哪些正確？_____

- (A) 已知 $ab \neq 0$ ，若 $a + 2b$ 、 $2a - b$ 為有理數，則 a 、 b 必為有理數
- (B) 已知 $ab \neq 0$ ，若 $a \times b$ 、 $a \div b$ 為有理數，則 a 、 b 必為有理數
- (C) 已知 $ab \neq 0$ ，若 a^2 、 b^2 為有理數，則 $a \times b$ 必為有理數
- (D) 若 a 、 b 為有理數，且 $a\sqrt{3} + b\sqrt{2} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ ，則 $a = 2$ ， $b = 3$
- (E) 若 a 為有理數，且 $a + b = 2 + 3\sqrt{2}$ ，則 $a = 2$ ， $b = 3\sqrt{2}$
- (F) 若 a 、 b 為無理數，且 $2a + 3b = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ ，則 $a = \sqrt{3}$ ， $b = \sqrt{2}$

概念 4

數線上的分點公式：數線上有 $A(a)$ 、 $B(b)$ 兩點，若點 P 在 $\overline{AB}$ 內且 $\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$ ，則 P ()。

例 1：在數線上，已知 $A(-12)$ 、 $B(12)$ ，已知 $\overline{PA} : \overline{PB} = 3 : 5$ ，試求：

- (1) 若點 P 在 $\overline{AB}$ 內，則 P 點坐標為_____。
- (2) 若點 P 在 $\overline{AB}$ 外，則 P 點坐標為_____。

例 2：已知實數 a 、 b 滿足 $a < b$ ，則下列哪些大小關係必定成立？_____

- (A) $\frac{a+b}{3} < \frac{a+b}{2}$
- (B) $\frac{4a+b}{5} < \frac{3a+b}{4}$
- (C) 若 $b > 0$ ，則 $\frac{2a-b}{5} < \frac{a-b}{4}$
- (D) 若 $b < 0$ ，則 $\frac{2a-b}{5} < \frac{a-b}{4}$

概念 5

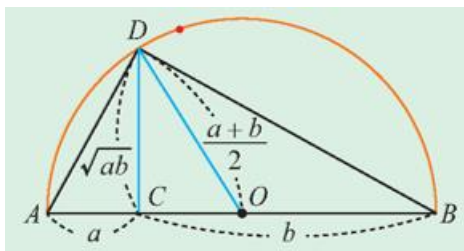
雙重根號的化簡：若 a 、 b 為非負實數，則：

$$(1) \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (2) \sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad , \text{其中 } a \geq b$$

例 1：設 $\sqrt{14 + \sqrt{180}}$ 的整數部分為_____，小數部分為_____。

概念 6

算幾不等式：若 a 、 b 為正實數，必滿足 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，其中等號成立($\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$) 的條件為 $a = b$ 。



例 1： (1)若 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $2a + b = 12$ ，則當數對 $(a, b) =$ _____時， ab 有最大值_____。
(2)若 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $ab = 12$ ，則當數對 $(a, b) =$ _____時， $a + 3b$ 有最小值_____。

例 2：已知 $x > 0$ ，則 $\frac{x^2+1}{x}$ 的最小值為_____。

概念 7

乘法公式：

$$1. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$2. (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$3. a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$4. (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$5. a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$6. a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

例 1：已知 $a < b$ ，且 $a + b = 5$ ， $ab = 3$ ，試求：

$$(1) a^2 + b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) a - b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) a^3 - b^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

例 2：若 $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ，則 $\frac{x^3-8}{x-2} + \frac{2x^2-8}{x+2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

概念 8

絕對值：數線上 x 到原點的距離為 $|x|$ ， a 到 b 的距離為 $|a - b|$ 。

$$1. (1) \text{設 } a \text{ 為實數，則 } |a| = \underline{\hspace{2cm}}, a \geq 0$$
$$\hspace{15em}, a < 0。$$

$$(2) \text{設 } a \text{ 為實數，則 } |x - a| = \underline{\hspace{2cm}}, x \geq a$$
$$\hspace{15em}, x < a。$$

絕對值方程式與不等式：

1. 設 $r > 0$ ，則：

$$(1) |x - a| = r \text{ 的解為 } x = a \pm r$$

$$(2) |x - a| \leq r \text{ 的解為 } a - r \leq x \leq a + r，\text{即 } x \text{ 位於區間 } [a - r, a + r] \text{ 內}$$

$$(3) |x - a| \geq r \text{ 的解為 } x \leq a - r \text{ 或 } x \geq a + r，\text{即 } x \text{ 位於區間 } [-\infty, a - r] \cup [a + r, \infty] \text{ 內}$$

2. $f(x) = |x - a| + |x - b|$ 為 x 到 a 與 x 到 b 的距離和，所以 $f(x)$ 的最小值為 $|a - b|$

例 1：已知方程式 $|2x - a| = b$ 的解為 $x = -1$ 和 $x = 7$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 2：不等式 $|-2x + 7| \leq 10$ 的整數解有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個。

例 3： $f(x) = |x + 1| + |x - 5|$ ，則 $f(x)$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，此時 x 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

概念 9

指數符號的定義與指數律：

1. 若 $a \neq 0$ ，則 $a^0 = 1$ ， $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。若 $a > 0$ 可取分數次方，為 $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ ，其中 m, n 為正整數且 $m \geq 2$ 。

2. 指數律：設 $a, b > 0$ ， x, y 為實數，則：

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$a^x \cdot b^x = (ab)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
---------------------------	-----------------------------	--------------------	--------------------------	--

例 1：對任意實數 x 而言， $27^{(x^2 + \frac{2}{3})}$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- (A) 3 (B) $\sqrt{3}$ (C) 9 (D) 27 (E) $81\sqrt{3}$

【97 學測】

例 2：計算下列各式的值：

(1) $(\sqrt{24})^{-2} \times (\sqrt{18})^0 \div (\sqrt{72})^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\sqrt[3]{3^{-6}} \times \sqrt{9^{-\frac{3}{2}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 3：已知 $4^x = 3$ ， $8^y = 5$ ，試求下列各式的值：

(1) $16^{x+3y} =$ _____ (2) $(3^{\frac{1}{x}} + 1)^{\frac{1}{y}} =$ _____。

概念 10

常用對數：設 $x > 0$ ，若將 x 寫成 $x = 10^y$ ，則 y 稱為 x 的常用對數，記為 $y = \log x$ ，故 $x = 10^{\log x}$ 。

例 1：試求下列各式的值：

(1) $\log 0.00001 =$ _____。 (2) $10^{\log 2.7} =$ _____。

(3) 求 x 值， $10^x = 0.3$ ， $x =$ _____。

例 2： $5^2 \times 10^{-2 \log 5} + 10^{1+\log 7.1} =$ _____。

例 3：若 $n < \log 5432100 < n + 1$ 且 n 為整數，則 $n =$ _____。

精選題型

➤ 範例 1

設 $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$ 的整數部分為 x ，小數部分為 y ，若 $\frac{x-k}{y} = \sqrt{11+4\sqrt{7}}$ ，則 $k =$ _____。

➤ 範例 2

若不等式 $|ax+1| \geq b$ 之解為 $x \geq 3$ 或 $x \leq -2$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

➤ 範例 3

不等式 $|x| + 2|x-1| < 4$ ，則不等式的解為_____。

➤ 範例 4

已知正無理數 a 的小數部分為 b ，且滿足 $a^2 + b^2 = 2$ ，則 $ab =$ _____。

➤ 範例 5

有一個直角三角形，斜邊長為 4，其中一股長為 $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ ，則另一股長為_____。

➤ 範例 6

邊長為 3、4、5 的直角三角形 ABC ，從斜邊 $\overline{BC}$ 上一點 P ，分別往兩股 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 作垂直線 $\overline{PD}$ 、 $\overline{PE}$ ，設垂足為 D 、 E ，則矩形 $ADPE$ 面積最大為_____。

➤ 範例 7

設 $a^{2x} = 1 + \sqrt{2}$ ，則 $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} =$ _____。

➤ 範例 8

已知芮氏地震規模 M 與釋放的能量 E (爾格)之間的關係為 $\log E = 11.8 + 1.5M$ 。已知 $10^{0.3} \approx 2.0$ ，試問：

- (1) 地震規模 5 的地震，釋放的能量為_____爾格。(以兩位有效數字表示)
- (2) 地震規模 7 的地震，釋放的能量是地震規模 5 所釋放能量的_____倍。

➤ 範例 9

放射性元素容易衰變成其他較為穩定的元素，而放射性元素經衰變後只剩下原來重量的一半所經過的時間稱為半衰期。元素銫 137 (^{137}Cs) 的半衰期約為 30 年，若原有 10 克的銫 137，試問：

- (1) 經過 300 年後，剩下大約幾克的銫 137？_____
- (2) 大約經過幾年後，只剩下 1 克的銫 137？($\log 2 \approx 0.3010$)_____